

THESES

présentées

AU CENTRE D'ORSAY
UNIVERSITE PARIS - SUD

pour obtenir

le grade de Docteur Es - Sciences

par

ANTOINE Philippe

1^e Thèse - "ETUDE DE LA STRUCTURE DE CERTAINS ESPACES
FONCTIONNELS ; APPLICATIONS"

2^e Thèse - PROPOSITIONS DONNEES

Soutenue le 16 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury : MM. CERF, Président
EHRESMANN, Examineur
DEDECKER, Examineur
POENARU, Examineur



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547107_0005

THESES

présentées

AU CENTRE D'ORSAY
UNIVERSITE PARIS - SUD

pour obtenir

le grade de Docteur Es - Sciences

par

ANTOINE Philippe

1^e Thèse - "ETUDE DE LA STRUCTURE DE CERTAINS ESPACES
FONCTIONNELS ; APPLICATIONS "

2^e Thèse - PROPOSITIONS DONNEES

Soutenue le 16 Juin 1972 devant la Commission d'Examen

Membres du Jury : MM. CERF, Président
EHRESMANN, Examineur
DEDECKER, Examineur
POENARU, Examineur

THESES

ANTOINE PÉTERS

1. *De la nature et de l'étendue de la science*

2. *De la méthode et de la logique*



3. *De la philosophie et de la métaphysique*

4. *De la morale et de la politique*

"Would you tell me, please, which way
I ought to go from here ?"

"That depends a good deal on where you
want to get to", said the Cat.

"I don't much care where" - said Alice.

"Then it doesn't matter which way you go",
said the Cat.

- "so long as I get somewhere", Alice added
as an explanation.

"Oh, you're sure to do that", said the Cat,
"if you only walk long enough".

(L. Carroll)

*

*

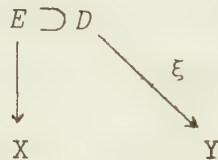
*

Nous tenons à exprimer ici toute notre reconnaissance à
Monsieur Dedecker qui nous a initié aux mystères de l'analyse globale, à
Monsieur Cerf qui nous a fait l'honneur de présider notre jury, à
Monsieur Ehresmann qui a accepté de nous donner le sujet de la seconde thèse
et à Monsieur Poenaru qui a bien voulu faire partie du jury.

Tous nos remerciements enfin au secrétariat du Département de
Mathématiques de Lille, et en particulier à Madame Tatti, sans qui cette édition
n'aurait pas vu le jour.

INTRODUCTION.-

Considérons l'ensemble $H^\infty(Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^∞ d'une variété Y . Etant donné un voisinage tubulaire de classe C^∞



d'une sous-variété compacte X de Y , on définit une carte locale ϕ_ξ de $H^\infty(Y)$ au point X sur un ouvert de l'espace de Fréchet $C^\infty(E)$, en associant à toute section s de classe C^∞ de E , prenant ses valeurs dans D , la sous-variété image de X par le plongement $\xi \circ s$. Si ϕ_ξ et $\phi_{\xi'}$ sont deux cartes de ce type en des points X et X' , on montre que le changement de cartes est une application de classe C^∞ entre ouverts d'espaces de Fréchet, au sens donné à cette expression par A. Bastiani [3] et J.A. Leslie [9]. La famille des cartes locales de ce type constitue donc un atlas de classe C^∞ de $H^\infty(Y)$. Etant donné les insuffisances de la théorie des variétés de Fréchet, on est amené à chercher si $H^\infty(Y)$ ne serait pas, sur le modèle des variétés d'applications de classe C^∞ , limite d'une suite décroissante $\{H^r\}_{r \geq r_0}$ de variétés banachiques. Un candidat raisonnable pour H^r serait l'ensemble $H^r(Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^r de Y , muni d'une structure de variété. Toute sous-variété compacte X de classe C^r de Y admettant, si r est supérieur ou égal à 1, un voisinage tubulaire (E, D, ξ) de même classe C^r (Th. III.0.1), on définit une carte locale de $H^r(Y)$ au point X sur un ouvert de l'espace de Banach $C^r(E)$, en associant à toute section s de classe C^r de E , prenant ses valeurs dans D , la sous-variété image de X par le plongement $\xi \circ s$. Toutefois, les changements de cartes ne sont que des applications continues entre ouverts d'espaces de Banach et l'on ne définit ainsi

sur $H^r(Y)$ qu'une structure de variété topologique, telle cependant que la suite $\{H^r(Y)\}_{r \geq 1}$ résolve du point de vue topologique le problème de l'approximation de $H^\infty(Y)$ par des variétés banachiques puisque l'application d'inclusion de $H^{r+1}(Y)$ dans $H^r(Y)$ est continue et d'image dense et que l'espace topologique $H^\infty(Y)$ est la limite des espaces $H^r(Y)$.

On peut rendre compte de la structure fine des variétés $H^r(Y)$ en se plaçant dans le cadre d'une famille d'extensions de la géométrie différentielle ayant pour modèles les chaînes d'espaces de Banach, c'est-à-dire les familles $\{E_k\}_{k=0}^r$ d'espaces de Banach telles que pour $k \leq \ell$ l'espace vectoriel sous-jacent à E_k soit un sous-espace de l'espace vectoriel sous-jacent à E_ℓ et que l'application d'inclusion soit continue et d'image dense. Si $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ sont deux chaînes de même longueur r , nous introduisons (Ch. I, §5) pour tout s vérifiant $0 \leq s \leq r$ la notion d'application s fois dérivable d'un ouvert de E_0 dans F_0 , relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$; nous dirons qu'une telle application est de classe D^r . Une structure de variété de classe D^r sur un espace X est alors définie par un atlas

$\{U_\alpha, \phi_\alpha, \{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r\}_{\alpha \in A}$ où $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de X ,

$\{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r$ est une chaîne de longueur r d'espaces de Banach et ϕ_α est un homéomorphisme de U_α sur un ouvert de $E_{0;\alpha}$ tel que pour tout couple d'indices (α, β) l'application $\phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ soit de classe D^r relativement aux chaînes $\{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r$ et $\{E_{k;\beta}\}_{k=0}^r$; une structure de variété de classe D^r définit pour tout s inférieur ou égal à r une structure sous-jacente de variété de classe D^s . Nous montrons qu'il existe sur $H^r(Y)$ une structure de variété de classe D^r (Ch. III, §1) telle que la structure sous-jacente de classe D^0 soit la structure de variété topologique précédemment définie et que la suite $\{H^r(Y)\}_{r \geq s}$, où $H^r(Y)$ est muni de sa structure de classe D^s sous-jacente, résolve le problème de l'approximation de $H^\infty(Y)$ en tant que variété de classe C^s .

Cette théorie a un domaine d'application plus vaste que la seule étude des variétés $H^r(Y)$; elle apporte une nouvelle manière d'envisager

visager certains problèmes traités classiquement dans le cadre de la géométrie différentielle banachique. Nous avons développé le cas des variétés d'applications différentiables d'une variété compacte dans une variété admettant une application exponentielle et le cas du groupe des difféomorphismes d'une variété compacte. Si X est une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle (Déf. II.2.1) on définit classiquement un C^0 -atlas canonique $A_{C^r(X,Y)}$ sur l'espace $C^r(X,Y)$ des applications de classe C^r de X dans Y , d'où une structure de variété banachique topologique ; étant donné un difféomorphisme η de classe C^r de Y sur une variété $\bar{Y}$ de classe C^{r+s} admettant une application exponentielle, on sait extraire du C^0 -atlas $A_{C^r(X,Y)}$ un sous-atlas $A_{C^r(X,Y)}^\eta$ de classe C^s , définissant ainsi une structure de variété banachique de classe C^s sur $C^r(X,Y)$, mais cette structure n'est évidemment pas canonique. C'est à cela, nous semble-t-il, qu'il faut attribuer le fait qu'en général les applications naturellement attachées à ces variétés sont continues mais ne sont pas compatibles avec les structures différentiables : il en est ainsi pour l'application de composition

$$\gamma : C^r(X,Y) \times C^r(Y,Z) \rightarrow C^r(X,Z) \quad (f,g) \rightsquigarrow g \circ f$$

et pour l'application de prise de l'inverse

$$\iota : \text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Aut}^r(X) \quad f \rightsquigarrow f^{-1}$$

dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte X , qui est une sous-variété ouverte de $C^r(X,X)$ pour $r \geq 1$. Nous montrons (Ch. II, §3) que le C^0 -atlas canonique $A_{C^r(X,Y)}$ définit un atlas de classe D^r et que toutes les applications naturelles sont de classe maximum ; en particulier, $\text{Aut}^r(X)$ est un groupe dans la catégorie des variétés de classe D^r . Quoique la structure canonique ainsi définie sur $C^r(X,Y)$ (resp. $\text{Aut}^r(X)$) soit moins fine qu'une

structure différentiable de même classe, elle permet aussi bien que celle-ci, et parfois mieux, de rendre compte des propriétés de type différentiel de la variété étudiée. Par exemple, l'application d'évaluation

$$\text{ev} : X \times C^r(X, Y) \rightarrow Y \quad (x, f) \rightsquigarrow f(x)$$

est de classe D^r et cela entraîne qu'elle est de classe C^r relativement à toute carte locale du C^0 -atlas $A_{C^r(X, Y)}$; l'application d'évaluation est donc certainement de classe $C^{\inf(r, s)}$ relativement à une structure de variété de classe C^s définie sur $C^r(X, Y)$ par un sous-atlas $A_{C^r(X, Y)}^n$. De même, les propriétés de différentiabilité des applications composées

$$C^r(X, Y) \times C^r(Y, Z) \xrightarrow{\gamma} C^r(X, Z) \longleftrightarrow C^{r-u}(X, Z)$$

et

$$\text{Aut}^r(X) \xrightarrow{i} \text{Aut}^r(X) \longleftrightarrow \text{Aut}^{r-u}(X)$$

sont elles conséquences de ce que γ et i sont des applications de classe D^r . Citons enfin un résultat de grande importance pratique qui est sans équivalent dans la théorie usuelle : Z étant une variété de classe C^r , il y a correspondance biunivoque entre les applications de classe D^r de Z dans $C^r(X, Y)$ et les applications de classe C^r de $X \times Z$ dans Y .

Reprenant dans le cas des classes de différentiabilité finies le théorème classique de fibration d'un espace de plongement sur un espace de sous-variétés [4], nous montrons que l'espace $\text{Pl}^r(X; Y)$ des plongements de classe C^r d'une variété compacte X de classe C^r dans une variété Y de classe C^r admettant une application exponentielle, est l'espace total d'un espace fibré principal de classe D^r , de base la variété $H_X^r(Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^r de Y difféomorphes à X et de groupe structural $\text{Aut}^r(X)$. Cette fibration permet de donner une interprétation géométrique simple des ap-

plications de classe D^S d'une variété banachique V dans la variété $H^r(Y)$. En particulier, il y a correspondance biunivoque entre les applications de classe D^r de V dans $H^r(Y)$ et les sous-variétés M de classe C^r de $V \times Y$ telles que la restriction à M de la projection sur V soit une submersion surjective propre.

L'intérêt des propriétés spécifiques de la géométrie D^r des espaces fonctionnels (la possibilité de considérer des espaces fonctionnels en classe finie tout en conservant une structure de type différentiel à laquelle les constructions formelles de la géométrie différentielle s'étendent naturellement (cf. par exemple Ch. IV, §0) ; la caractérisation des applications dérivables de but un espace fonctionnel rendue possible par le caractère intrinsèque, même en classe finie, des structures considérées) est illustré par la résolution via l'analyse fonctionnelle de quelques problèmes de géométrie différentielle en dimension finie : nous montrons ainsi qu'étant donnée une submersion propre f de classe C^r , avec $1 \leq r$, de X dans Y , il existe sur X et sur Y des structures de variétés de classe C^∞ , compatibles avec les structures C^r initiales, telles que f soit une application de classe C^∞ (Ch. IV, 3.8), la structure C^∞ de Y pouvant être imposée a priori ; nous montrons de même qu'étant donné un espace fibré E de classe C^r , avec $1 \leq r$, au sens de Steenrod, si la fibre et l'action du groupe structural sont de classe C^∞ , il existe sur E une structure d'espace fibré de classe C^∞ , compatible avec la structure C^r initiale, pourvu que le groupe structural G vérifie une condition de réalisation comme groupe de difféomorphismes d'une variété compacte, condition que vérifient toujours par exemple les groupes compacts et les sous-groupes fermés d'un groupe linéaire (le premier cas pouvant bien sûr se ramener au second).

Le dernier chapitre est consacré à une version assez raffinée du théorème de Nash ; il peut pour l'essentiel être lu indépendamment des chapitres précédents. La théorie de dérivabilité intervient ici comme un cadre privilégié

pour l'application du théorème de Nash, privilégié pour deux raisons :

- parmi toutes les applications présentant globalement les mêmes propriétés de différentiabilité qu'une application de classe D^2 (i.e. $J^{k-2,k}$ or J^k de classe C^2) c'est essentiellement pour les applications de classe D^2 que le théorème de Nash (sous la forme paramétrisée du théorème V.3.6) donne une solution présentant une "perte de différentiabilité" minimum (remarque V.5.1) ;

- les propriétés formelles des applications dérivables (composition, stabilité pour les opérations élémentaires) permettent une vérification aisée des hypothèses du théorème de Nash (remarque V.5.2), y compris les hypothèses de majoration.

CHAPITRE I

§ 1 - FAMILLES FERMEES DE PARTIES D'UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE.

Soit E un espace vectoriel topologique et $S \rightarrow \bar{S}$ l'application de l'ensemble $PP(E)$ des familles de parties de E dans lui-même définie de la manière suivante : une partie M appartient à $\bar{S}$ si et seulement si, quel que soit le voisinage V de l'origine dans E , il existe une partie A élément de S telle que M soit contenue dans $A+V$. Il suffit bien sûr que cette propriété soit vérifiée pour tous les éléments d'un système fondamental de voisinages.

Proposition 1.1.- L'application $S \rightarrow \bar{S}$ définit une topologie sur $PP(E)$.

Nous devons vérifier les quatre axiomes d'une fermeture. Les deux premiers ($F1 : \bar{\emptyset} = \emptyset$) et ($F2 : S \subset \bar{S}$) sont évidemment vérifiés. Soient M un élément de $\bar{S}$, V un voisinage arbitraire de l'origine et U un voisinage de l'origine tel que $U+U \subset V$. Il existe un élément A de S tel que $M \subset A+U$ et un élément B de $\bar{S}$ tel que $A \subset B+U$. On a donc $M \subset B+U+U \subset B+V$, ce qui démontre que M appartient à $\bar{S}$, c'est-à-dire que $\bar{\bar{S}} \subset \bar{S}$. Il en résulte ($F3 : \bar{\bar{S}} = \bar{S}$). Soit M un élément de $\overline{S_1 \cup S_2}$: quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe un élément A de S_1 ou de S_2 tel que $M \subset A+V$. On peut donc faire une partition $\{V_1, V_2\}$ du filtre V des voisinages de l'origine de telle manière que pour tout $V \in V_1$ il existe $A \in S_1$ tel que $M \subset A+V$. Mais alors V_1 ou V_2 est une base du filtre V et donc M appartient à S_1 ou S_2 , c'est-à-dire que $\overline{S_1 \cup S_2} \subset \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$. L'inclusion inverse étant évidente, on a ($F4 : \overline{S_1 \cup S_2} = \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2$) $\square$

Remarque 1.2.- Si S est une famille fermée, toute partie d'un élément de S appartient à S et l'adhérence d'un élément de S appartient à S . Le premier point est évident ; le second résulte de ce que l'adhérence d'une

partie quelconque A est l'intersection des parties $A+V$ lorsque V parcourt le filtre des voisinages de l'origine.

Proposition 1.3. - La famille $\mathcal{B}$ de toutes les parties bornées de E est fermée.

Soit M un élément de $\bar{\mathcal{B}}$. Quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe un borné A tel que $M \subset A+V$. La partie A étant bornée, il existe λ vérifiant $0 < \lambda < 1$ tel que $\lambda A \subset V$. On a donc $\lambda M \subset \lambda A + \lambda V \subset V+V$, ce qui montre que M est borné. $\square$

Corollaire 1.4. - La fermeture d'une famille de parties bornées est une famille de parties bornées.

Proposition 1.5. - La fermeture de la famille $\mathcal{F}$ des parties finies de E est la famille $\mathcal{K}$ des parties précompactes de E .

Si M est une partie précompacte, quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe une famille finie de points $\{a_k\}_{k=1}^n$ tels que $\{a_k+V\}_{k=1}^n$ soit un recouvrement de M . On a donc $M \subset \{a_k\}_{k=1}^n + V$, ce qui démontre que M appartient à $\bar{\mathcal{F}}$. La réciproque est immédiate. $\square$

Corollaire 1.6. - Toute famille fermée contenant les parties finies contient les parties précompactes.

Proposition 1.7. - Soient X un espace topologique compact, E un espace vectoriel topologique et $F = C(X, E)$ l'espace vectoriel des applications continues de X dans E muni de la topologie de la convergence uniforme. La famille $\mathcal{C}$ des parties équicontinues de F est fermée.

Soit M un élément de $\mathcal{C}$. Quel que soit le voisinage V de l'origine dans E , il existe une partie équicontinue Φ telle que $M \subset \Phi + V(V)$, où $V(V)$ est le voisinage de l'origine dans F formé des applications ϕ telles que $\phi(X) \subset V$. La famille Φ étant équicontinue, quel que soit $x_0 \in X$, il

existe un voisinage U de x_0 tel que $x \in U$ entraîne $\phi(x) - \phi(x_0) \in V$ quel que soit $\phi \in \Phi$. Il en résulte que pour tout élément ψ de M , qui peut s'écrire $\psi = \phi_1 + \phi_2$ avec $\phi_1 \in \Phi$ et $\phi_2 \in V(V)$, vérifie

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \phi_1(x) - \phi_1(x_0) + \phi_2(x) - \phi_2(x_0) \in V + V + (-V)$$

dès que x appartient à U , ce qui exprime l'équicontinuité de M $\square$

Corollaire 1.8.- La famille $\mathcal{C}^0$ des parties équicontinues bornées est fermée ; elle contient la famille des parties précompactes.

On a en effet $\mathcal{C}^0 = \mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ intersection de deux fermés et il est clair que $\mathcal{C}^0$ contient F , donc K d'après le corollaire 1.6.

Une partie S de E est dite algébriquement saturée si toute partie d'un élément de S appartient à S , toute réunion finie d'éléments de S appartient à S , tout homothétique d'un élément de S appartient à S et l'enveloppe convexe équilibrée d'un élément de S appartient à S . La famille est dite saturée si elle est algébriquement saturée et si l'adhérence d'un élément de S appartient à S .

Proposition 1.9.- Si E est un espace vectoriel topologique localement convexe, la fermeture d'une famille algébriquement saturée S est saturée.

La remarque 1.2 entraîne immédiatement que $\bar{S}$ est stable par sous-objets et par adhérence. Soit $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ une réunion finie d'éléments de $\bar{S}$; quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe pour chaque indice i un élément A_i de S tel que $\overline{M_i} \subset A_i + V$ et l'on a donc $M \subset \left[\bigcup_{i=1}^n A_i \right] + V$ où $\bigcup_{i=1}^n A_i$ appartient à S qui est stable par réunion finie ; il en résulte que M appartient à $\bar{S}$ et que cette famille est stable par réunion finie. Soit $N = \lambda M$ un homothétique d'un élément de $\bar{S}$; si $\lambda = 0$ on a $N = \{0\}$ qui appartient à S donc à $\bar{S}$; si $\lambda \neq 0$, quel que soit le voisinage V de l'origine, il existe un élément A de S tel que $M \subset A + \frac{1}{\lambda} V$ et l'on a

donc $N \subset \lambda A + V$ où λA appartient à S qui est stable par homothétie ; il en résulte que N appartient à $\bar{S}$ et que cette famille est stable par homothétie. Soit M un élément de $\bar{S}$ et $N = \hat{\bigcup} M$ son enveloppe convexe équilibrée ; quel que soit le voisinage V convexe et équilibré de l'origine, il existe un élément A de S tel que $M \subset A + V$ et l'on a donc $N \subset \hat{\bigcup} A + V$, où $\hat{\bigcup} A$ est un élément de S qui est stable par $\hat{\bigcup}$; si E est localement convexe, les voisinages convexes et équilibrés formant un système fondamental de voisinages de l'origine, il en résulte que N appartient à $\bar{S}$ et que cette famille est stable par $\hat{\bigcup}$.

§ 2 - ESPACES VECTORIELS S-BORNES.

Définition 2.1.- Nous appellerons espace vectoriel S-borné un couple $E = (E, S_E)$ où E est un espace vectoriel topologique localement convexe, séparé et complet et où S_E est une famille fermée et saturée de parties bornées de E , contenant les parties finies.

Définition 2.2.- Un morphisme $u : E \rightarrow F$ entre deux espaces vectoriels S-BORNES est une application linéaire continue $u : E \rightarrow F$ qui transforme tout élément de S_E en un élément de S_F . Les espaces vectoriels S-bornés forment une catégorie additive que nous noterons $\underline{V}$ (cf. corollaire 2.5).

Remarque 2.3.- La catégorie des espaces de Banach sera identifiée à la sous-catégorie pleine de $\underline{V}$ des couples (E, B_E) , où E est un espace de Banach et B_E la famille des parties bornées de E .

Soient $\{E_i\}_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{V}$, E un espace vectoriel et pour tout indice i une application linéaire $u_i : E \rightarrow E_i$. On définit une famille S_E de parties de E de la manière suivante : une partie A appartient à S_E si et seulement si $u_i(A)$ appartient à S_{E_i} pour tout indice i . Il est immédiat, les applications u_i étant linéaires, que S_E est algébriquement saturé et que les parties finies appartiennent à S_E .

Proposition 2.4.- Si E est muni de la structure d'espace vectoriel topologique initiale pour la famille d'applications linéaires u_i , la famille S_E est une famille fermée de parties bornées de E .

Si M appartient à $\overline{S_E}$, quel que soit i et quel que soit le voisinage V_i de l'origine dans E_i , il existe A élément de S_E tel que $M \subset A + u_i^{-1}(V_i)$, soit encore $u_i(M) \subset u_i(A) + V$, où $u_i(A)$ est un élément de S_{E_i} . Il en résulte que $u_i(M)$ appartient à S_{E_i} qui est fermé et donc que M

appartient à S_E , ce qui démontre que cette famille est fermée.

Soit M un élément de S_E . Son image par chaque u_i est bornée, donc absorbée par tout voisinage V_i de l'origine dans E . Il en résulte que M est absorbé par tout $u_i^{-1}(V_i)$, donc par tout voisinage de l'origine dans E , c'est-à-dire que M est borné.

La topologie initiale sur E est localement convexe. Si en outre elle est séparée et complète, la proposition 2.4 montre que (E, S_E) est un objet de $\underline{V}$ et c'est dans cette catégorie la structure initiale définie par les u_i sur E .

Corollaire 2.5.- La catégorie $\underline{V}$ admet des produits quelconques.

Soit $\{E_i\}_{i \in I}$ une famille d'objets de $\underline{V}$. Le produit $E = \prod_{i \in I} E_i$ muni de la structure initiale pour les projections $i : E \rightarrow E_i$ est séparé et complet. Il existe donc un objet $\mathbb{E} = \prod_{i \in I} E_i$ dans $\underline{V}$, structure initiale pour les projections p_i et cet objet est le produit des E_i dans $\underline{V}$ au sens de cette catégorie.

Le produit $\mathbb{E}$ peut être décrit de la manière suivante : $\mathbb{E} = (E, S_E)$ où E est le produit topologique $\prod_{i \in I} E_i$ et où S_E est la famille des parties A de E contenues dans un produit $\prod_{i \in I} A_i$ avec A_i élément de S_{E_i} .

Corollaire 2.6.- Soient $\mathbb{E}$ un objet de $\underline{V}$ et E' un sous-espace fermé de E . Le couple formé de E' muni de la topologie induite par celle de E et de la famille $S_{E'}$, des intersections des éléments de S_E avec E' est un objet de $\underline{V}$.

La topologie induite sur E' est la topologie initiale pour l'injection canonique ; elle est séparée et complète puisque E' est fermé dans E $\square$

§ 3 - APPLICATIONS MULTILINEAIRES S-BORNEES.-

Définition 3.1.- Soient $E_1, \dots, E_\alpha$, F une famille finie d'objets de $\underline{V}$. Nous dirons qu'une application α -linéaire $u : \prod_{i=1}^\alpha E_i \rightarrow F$ est S-bornée si quels que soient les éléments A_i de S_{E_i} on a $u(\prod_{i=1}^\alpha A_i)$ élément de S_F .

Soit $E = (E, S_E)$ le produit dans $\underline{V}$ de la famille $\{E_i\}_{i=1}^\alpha$. La condition pour une application α -linéaire u d'être S-bornée est équivalente à la condition suivante : quel que soit A élément de S_E $u(A)$ appartient à S_F . Cela résulte de la description de S_E donnée au corollaire 2.5.

Proposition 3.2.- Une application α -linéaire S-bornée est bornée.

La famille S_E étant fermée et contenant les parties finies, il résulte du corollaire 1.6 que S_E contient les parties précompactes. Une application α -linéaire S-bornée transforme donc toute partie précompacte en un élément de S_F qui est un borné, ce qui est une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application α -linéaire soit bornée.

Corollaire 3.3.- Si les espaces E_i sont bornologiques, toute application α -linéaire S-bornée $u : \prod_{i=1}^\alpha E_i \rightarrow F$ est $(B_1, \dots, B_\alpha)$ -hypocontinue, où B_i est la famille des parties bornées de E_i . En particulier, l'ensemble des applications linéaires S-bornées de E dans F s'identifie à l'ensemble des morphismes de E dans F lorsque E est bornologique. Si les E_i sont des espaces de Banach, toute application α -linéaire S-bornée est continue.

Les espaces E étant bornologiques, u bornée et F localement convexe, l'application u est séparément continue. Le corollaire résulte alors de ce que les espaces E_i bornologiques et complets sont tonnelés $\square$

La famille $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ des applications α -linéaires S-bornées est un espace vectoriel. Nous allons définir sur cet espace une topologie et une famille de parties bornées qui en feront un objet de $\underline{V}$.

Proposition 3.4.- Soit $E = \prod_{i=1}^{\alpha} E_i = (E, S_E)$. La S_E -topologie induite par F^E sur $L(E_1, \dots, E_{\alpha}; F)$ est une topologie d'espace vectoriel topologique localement convexe, séparé et complet.

L'espace F étant localement convexe et séparé, la famille S_E étant une famille de bornés de E recouvrant E (S_E contient en particulier toutes les parties finies), l'espace F^E muni de la S_E -topologie est un espace vectoriel topologique localement convexe et séparé ; il en est donc de même du sous-espace $L = L(E_1, \dots, E_{\alpha}; F)$ de F^E . Par ailleurs, F étant complet, F^E est complet. Une base de filtre de Cauchy $\mathcal{F}$ sur L converge donc vers un élément u de F^E et comme L est contenu dans le sous-espace fermé $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_{\alpha}; F)$ de toutes les applications α -linéaires, u est une application α -linéaire. Nous allons montrer que u transforme tout élément A de S_E en un élément de S_F . Quel que soit le voisinage V de l'origine dans F , il existe M de F tel que $u \in M + V(A, V)$, où $V(A, V)$ est le voisinage de l'origine dans F^E formé des applications de E dans F qui envoient A dans V . Si v appartient à M , on a $u(A) \subset v(A) + V$, où $v(A)$ est un élément de S_F puisque v appartient à L . La famille S_F étant fermée, il en résulte que $u(A)$ appartient à S_F , donc que u appartient à L $\square$

Soit S_L la famille des parties M de $L = L(E_1, \dots, E_{\alpha}; F)$ telles que pour tout élément A de S_E , on ait $M.A$ élément de S_F . La famille étant algébriquement saturée, il est clair que S_L est algébriquement saturée. En outre, tout élément de L transformant un élément de S_E en un élément de S_F , la famille S_L contient les parties finies.

Proposition 3.5.- Si $L = L(E_1, \dots, E_{\alpha}; F)$ est muni de la S_E -topologie, la famille S_L est une famille fermée de parties bornées de L .

Soit M une partie de L telle que, quel que soit le voisinage $V(A, V)$ de l'origine dans L , il existe un élément N de S_L tel que

$M \subset N + V(A, V)$. On a alors $M.A \subset N.A + V$, où $N.A$ appartient à S_F . La famille S_E étant fermée, il en résulte que $M.A$ appartient à S_F . La partie M appartient donc à S_L et cette famille est fermée.

Soient M un élément de S_L et $V(A, V)$ un voisinage de l'origine dans L . La partie $M.A$ appartenant à S_F est bornée et il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda(M.A) = (\lambda M).A \subset V$, c'est-à-dire $\lambda M \subset V(A, V)$. Tout élément de S_L est donc borné $\square$

Il résulte de la proposition 1.9 que la famille S_L qui est algébriquement saturée et fermée est saturée. Le couple formé de l'espace $L = L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ muni de la S_E -topologie et de la famille S_L de parties bornées de L est donc un objet de $\underline{V}$ que nous noterons $\mathbb{L}(E_1, \dots, E_\alpha; F)$. Si les objets E_i sont tous égaux à un même objet E , nous noterons $\mathbb{L}^\alpha(E; F)$ l'objet $\mathbb{L}(E_1, \dots, E_\alpha; F)$.

Proposition 3.6.- Les objets $\mathbb{L}(E_1, \dots, E_\alpha; \mathbb{L}(F_1, \dots, F_\beta; G))$ et $\mathbb{L}(E_1, \dots, E_\alpha; F_1, \dots, F_\beta; G)$ sont canoniquement isomorphes dans $\underline{V}$.

Soient $E = \coprod_{i=1}^\alpha E_i$ et $F = \coprod_{j=1}^\beta F_j$. L'application de $(G^F)^E$ dans $G^{E \times F}$ qui à toute application ϕ élément de $(G^F)^E$ associe l'application composée

$$\sim_\phi : E \times F \xrightarrow{\phi \times 1_F} G^F \times F \xrightarrow{\text{ev}} G$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Un système fondamental de voisinages de l'origine dans $(G^F)^E$ est de la forme $V(A, V(B, V))$ et un système fondamental de voisinages de l'origine dans $G^{E \times F}$ est de la forme $V(A \times B, V)$, où A est un élément de S_E , B un élément de S_F et V un voisinage de l'origine dans G ; on a $V(A, V(B, V)) = \{\phi \mid \phi(A) \subset V(B, V)\} = \{\phi \mid \sim_\phi(A \times B) \subset V\}$ qui s'identifie à $V(A \times B, V)$ par l'isomorphisme de $(G^F)^E$ sur $G^{E \times F}$ et cet isomorphisme est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Un élément ϕ de $(G^F)^E$ appartient à $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}(E_1, \dots, E_\alpha; \mathbb{L}(F_1, \dots, F_\beta; G))$

si et seulement si, pour tout A élément de S_E et tout B élément de S_F on a $\phi(A).B = \tilde{\phi}(A \times B)$ élément de S_G , c'est-à-dire si et seulement si $\tilde{\phi}$ appartient à $L_2 = L(E_1, \dots, E_\alpha, F_1, \dots, F_\beta; G)$; l'isomorphisme de $(G^F)^E$ sur $G^{E \times F}$ induit donc un isomorphisme topologique entre ces deux espaces. Nous devons encore montrer que cet isomorphisme échange les éléments de S_{L_1} et de S_{L_2} . Or M appartient à S_{L_1} si et seulement si, quels que soient A élément de S_E et B élément de S_F on a $(M.A).B = \tilde{M}.(A \times B)$ élément de S_G , c'est-à-dire si et seulement si M appartient à S_{L_2} $\square$

Proposition 3.7.- L'application d'évaluation

$$ev : E_1 \times E_2 \times \dots \times E_\alpha \times L(E_1, \dots, E_\alpha; F) \rightarrow F$$

vérifie les propriétés suivantes :

3.7.1. ev est une application $(\alpha+1)$ -linéaire S -bornée.

3.7.2. Quel que soit le voisinage W de l'origine dans F et quels que soient les éléments A_i de S_{E_i} , il existe un voisinage V de l'origine dans $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ tel que $ev(A_1 \times \dots \times A_\alpha \times V) \subset W$.

3.7.3. Si les espaces E_i sont bornologiques, quel que soit le voisinage W de l'origine dans F , quelles que soient les parties bornées B_i de E_i , pour $i \neq i_0$, et quelle que soit la partie bornée B de $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$, il existe un voisinage V_{i_0} de l'origine dans E_{i_0} tel que $ev(B_1 \times \dots \times V_{i_0} \times \dots \times B_\alpha \times B) \subset W$.

Le résultat 3.7.1 est une conséquence immédiate des définitions.

Le voisinage fondamental $V = V(A_1, \dots, A_\alpha; W)$ est tel, par définition, que $ev(A_1 \times \dots \times A_\alpha \times V) \subset W$, d'où la propriété 3.7.2.

Si les espaces E_i sont bornologiques, $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ est un espace d'applications $(B_1, \dots, B_\alpha)$ -hypocontinues (corollaire 3.3) et une partie bornée B de cet espace est une partie $(B_1, \dots, B_\alpha)$ -équihypocontinue puisque les espaces E_i bornologiques et complets sont tonnelés. Il existe donc un voisinage V_{i_0}

tel que $v(B_1 \times \dots \times v_{i_0} \times \dots \times B_\alpha) \subset W$ quel que soit v élément de B , c'est-à-dire $ev(B_1 \times \dots \times v_{i_0} \times \dots \times B_\alpha \times B) \subset W$ $\square$

Corollaire 3.8.- Soient X un espace topologique et

$$f_i : X \rightarrow E_i$$

$$g : X \rightarrow L(E_1, \dots, E_\alpha; \mathbb{F})$$

des applications continues et localement bornées. Si les espaces E_i sont bornologiques, l'application composée $ev \circ (f_1 \times \dots \times f_\alpha \times g)$ est continue et localement bornée.

Nous avons l'identité

$$ev(f_1(x_0), \dots, f_\alpha(x_0), g(x_0)) - ev(f_1(x), \dots, f_\alpha(x), g(x)) =$$

$$ev(f_1(x_0), \dots, f_\alpha(x_0), g(x_0) - g(x)) + \sum_{i=1}^{\alpha} ev(f_1(x), \dots, f_i(x_0) - f_i(x), \dots, f_\alpha(x_0), g(x)) .$$

La continuité de l'application composée résulte alors de 3.7.2 joint à la continuité de g et de 3.7.3 joint à la continuité de f_i et au caractère localement borné des applications f_j et g . Par ailleurs, ev étant une application $(\alpha+1)$ -linéaire S -bornée (3.7.1) est bornée ; il en résulte que si les applications f_j et g sont localement bornées, il en est de même de $ev \circ (f_1 \times \dots \times f_\alpha \times g)$ $\square$

Proposition 3.9.- L'application de composition :

$$\gamma : \prod_{i=1}^{\beta} L(E_1^i, \dots, E_{\alpha_i}^i; \mathbb{F}_i) \times L(\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_\beta; \mathbb{G}) \rightarrow L(E_1^1, \dots, E_{\alpha_\beta}^\beta; \mathbb{G})$$

vérifie les propriétés suivantes :

3.9.1. γ est une application $(\beta+1)$ -linéaire S -bornée.

3.9.2. Quel que soit le voisinage W de l'origine dans $L(E_1^1, \dots, E_{\alpha_\beta}^\beta; \mathbb{G})$ et quels que soient les éléments M_i de $S_{L(E_1^i, \dots, E_{\alpha_i}^i; \mathbb{F}_i)}$, il existe un voisinage V de l'origine dans $L(\mathbb{F}_1, \dots, \mathbb{F}_\beta; \mathbb{G})$ tel que $\gamma(M_1 \times \dots \times M_\beta \times V) \subset W$.

3.9.3. Si les espaces F_i sont bornologiques, quel que soit le voisinage W de l'origine dans $L(E_1^1, \dots, E_{\alpha_\beta}^\beta; \mathbb{G})$, quelle que soit la partie bornée B de $L(F_1, \dots, F_\beta; \mathbb{G})$ et quelles que soient les parties bornées B_i de $L(E_1^i, \dots, E_{\alpha_i}^i; \mathbb{F})$, pour $i \neq i_0$, il existe un voisinage U_{i_0} de l'origine dans $L(E_1^{i_0}, \dots, E_{\alpha_{i_0}}^{i_0}; F_{i_0})$ tel que $\gamma(B_1 \times \dots \times U_{i_0} \times \dots \times B_\beta \times B) \subset W$:

Le résultat 3.9.1 est une conséquence immédiate des définitions.

Pour démontrer 3.9.2 il suffit de prendre pour W un voisinage fondamental $V(A_1^1, \dots, A_{\alpha_\beta}^\beta; W)$. Les parties $A_i = M_i \cdot (A_1^i \times \dots \times A_{\alpha_i}^i)$ sont des éléments de S_{F_i} et si l'on pose $V = V(A_1, \dots, A_\beta; W)$ on a par définition $\gamma(M_1 \times \dots \times M_\beta \times V) \subset W$.

Prenons encore pour W un voisinage fondamental $V(A_1^1, \dots, A_{\alpha_\beta}^\beta; W)$. Les espaces F_i étant bornologiques, la partie B est une famille $(B_1, \dots, B_\beta)$ -équihypocontinue ; l'application d'évaluation étant bornée les parties $A_i = B_i \cdot (A_1^i \times \dots \times A_{\alpha_i}^i)$ sont bornées dans F_i ; il en résulte qu'il existe un voisinage U_{i_0} de l'origine dans F_{i_0} tel que $v(A_1 \times \dots \times U_{i_0} \times \dots \times A_\beta) \subset W$ quel que soit v élément de B . Si l'on pose $U_{i_0} = V(A_1^{i_0}, \dots, A_{\alpha_{i_0}}^{i_0}; U_{i_0})$ on a alors $\gamma(B_1 \times \dots \times U_{i_0} \times \dots \times B_\beta \times B) \subset W$, ce qui démontre 3.9.3 $\square$

Corollaire 3.10.- Soient X un espace topologique et

$$f_i : X \rightarrow L(E_1^i, \dots, E_{\alpha_i}^i; F_i)$$

$$g : X \rightarrow L(F_1, \dots, F_\beta; \mathbb{G})$$

des applications continues et localement bornées. Si les espaces F_i sont bornologiques, l'application composée $\gamma \circ (f_1 \times \dots \times f_\beta \times g)$ est continue et localement bornée.

Nous avons l'identité

$$\begin{aligned} & \gamma(f_1(x_0), \dots, f_\beta(x_0), g(x_0)) - \gamma(f_1(x), \dots, f_\beta(x), g(x)) = \\ & \gamma(f_1(x_0), \dots, f_\beta(x_0), g(x_0) - g(x)) + \sum_{i=1}^{\beta} \gamma(f_1(x), \dots, f_i(x_0) - f_i(x), \dots, f_\beta(x_0), g(x)). \end{aligned}$$

La continuité de l'application composée résulte alors de 3.9.2 joint à la continuité de g et de 3.9.3 joint à la continuité de f_i et au caractère localement borné des applications f_j et g . Par ailleurs, l'application γ étant une application $(\beta+1)$ -linéaire S -bornée est bornée, d'où il résulte que $\gamma \circ (f_1 \times \dots \times f_\beta \times g)$ est localement bornée si les applications f_j et g le sont $\square$

Nous travaillerons essentiellement avec des objets $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ où les espaces E_i et F sont banachiques ; cette situation particulière appelle quelques remarques :

3.11.1. L'espace vectoriel sous-jacent à $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ s'identifie à l'espace vectoriel sous-jacent d'un sous-espace fermé de l'espace de Banach $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$: le corollaire 3.3 indique en effet qu'il s'agit d'un espace d'applications multilinéaires continues et cet espace est complet pour une S -topologie d'après la proposition 3.4.

3.11.2. Les parties bornées de $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ sont simplement bornées donc bornées pour la topologie de la norme ; la réciproque est évidente.

3.11.3. Si nous supposons de plus que les objets E_i sont des espaces de Banach, c'est-à-dire que $S_{E_i} = B_{E_i}$, la topologie de $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ est la topologie de la norme et cet espace s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace de Banach $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$. Si en outre F est également un espace de Banach, $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ s'identifie à l'espace de Banach $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$.

3.11.4. Si les espaces E_i sont de dimension finie, S_{E_i} qui contient les parties précompactes s'identifie à la famille des parties bornées. Nous sommes donc dans les hypothèses de la remarque 3.11.3. Par ailleurs, une application α -linéaire continue transformant toute partie précompacte en une partie précompacte, donc en un élément de S_F , l'espace $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ s'identifie à l'espace $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ tout entier, sans hypothèse supplémentaire sur F .

3.11.5. Si nous supposons maintenant que l'objet F est un espace de Banach, toute application bornée est S -bornée : l'espace vectoriel sous-jacent à $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ est donc l'espace de toutes les applications α -linéaires continues.

§ 4 - CHAINES D'ESPACES DE BANACH.-

Définition 4.1.- Une chaîne de longueur r d'espaces de Banach est un ensemble $\{E_k\}_{k=0}^r$ d'espaces de Banach tel que pour $k \leq \ell$ l'espace vectoriel sous-jacent à E_k soit un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel sous-jacent à E_ℓ et que l'application d'inclusion de E_k dans E_ℓ soit continue et d'image dense. Les chaînes de longueur r sont les objets d'une catégorie $\underline{C}_r$ pour laquelle un morphisme d'une chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ dans une chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$ est une famille $\{u_k\}_{k=0}^r$ d'applications linéaires continues $u_k : E_k \rightarrow F_k$ telles que $u_k = u_\ell|_{E_k}$ si $k \leq \ell$. Nous identifierons la catégorie des espaces de Banach à la sous-catégorie pleine de $\underline{C}_r$ dont les objets sont les chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ constantes, c'est-à-dire telles que $E_0 = E_k$ pour tout indice k .

Remarque 4.2.- Soit $\{u_k\}_{k=0}^r$ un morphisme de la chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ dans la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$. L'espace E_0 étant dense dans les espaces E_k , les applications u_k sont entièrement déterminées par l'application u_0 . Nous parlerons donc d'applications linéaires continues u de E_0 dans F_0 qui définissent un morphisme de $\{E_k\}_{k=0}^r$ dans $\{F_k\}_{k=0}^r$, c'est-à-dire qui pour tout indice k s'étendent en une application linéaire continue u_k de E_k dans F_k .

Remarque 4.3.- La catégorie $\underline{C}_r$ admet de manière évidente des produits finis : le produit de deux chaînes $\{E'_k\}_{k=0}^r$ et $\{E''_k\}_{k=0}^r$ est la chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ définie par $E_k = E'_k \times E''_k$, munie des projections évidentes.

Soit $\{E_k\}_{k=0}^r$ une chaîne d'espaces de Banach. Nous noterons S_k la fermeture dans E_k de la famille B_0 des parties bornées de E_0 . L'inclusion de E_0 dans E_k étant linéaire et continue, la famille B_0 est une famille algébriquement saturée de parties bornées de E_k et le corollaire 1.4 et la proposition 1.9 entraînent que sa fermeture est une famille saturée de parties bornées ; par ailleurs, E_0 étant dense dans E_k , il est clair que S_k con-

tient les points de E_k , donc les parties finies. Il en résulte que $E_k = (E_k, S_k)$ est un objet de $\underline{V}$ et l'application d'inclusion i_k de E_0 dans E_k est un morphisme de E_0 dans E_k .

Lemme 4.4.- Soient $E = (E, S_E)$, $E' = (E', S_{E'})$ et $F = (F, S_F)$ trois objets de $\underline{V}$; $i : E \rightarrow E'$ un morphisme tel que $S_{E'} = \overline{i S_E}$, $u : E \rightarrow F$ un morphisme et $u' : E' \rightarrow F$ une application linéaire continue telle que $u' \circ i = u$. Alors u' définit un morphisme de E' dans F .

Nous devons montrer que u' transforme tout élément M de $S_{E'} = \overline{i S_E}$ en un élément de S_F . Soit W un voisinage de l'origine dans F et soit $V' = u'^{-1}(W)$; il existe alors un élément N de S_E tel que $M \subset i(N) + V'$ et l'on a

$$u'(M) \subset u' \circ i(N) + u'(V') \subset u(N) + W$$

où $u(N)$ appartient à S_F puisque u est un morphisme. Il en résulte que $u'(M)$ appartient à $\overline{S_F}$, donc à S_F puisque cette famille est fermée $\square$

Corollaire 4.5.- Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{C}_r$ et $\{u_k\}_{k=0}^r$ un morphisme de $\{E_k\}_{k=0}^r$ dans $\{F_k\}_{k=0}^r$. Pour tout indice k l'application u_k définit un morphisme de E_k dans F_k .

La propriété est évidente pour $k=0$. Pour $k \neq 0$ on applique le lemme en prenant $E = E_0$, $E' = E_k$, $i = i_k$ l'inclusion de E_0 dans E_k , $F = F_k$, $u = j_k \circ u_0$ où j_k est l'inclusion de F_0 dans F_k , $u' = u_k$ $\square$

Corollaire 4.6.- Soit $\{E_k\}_{k=0}^r$ un objet de $\underline{C}_r$. L'application d'inclusion $i_{\ell,k}$ de E_k dans E_ℓ pour $k \leq \ell$ définit un morphisme de E_k dans E_ℓ et l'on a $S_\ell = \overline{i_{\ell,k} S_k}$.

On applique le lemme en prenant $E = E_0$, $E' = E_k$, $i = i_{k,0} = i_k$, $F = E_\ell$, $u = i_{\ell,0} = i_\ell$, $u' = i_{\ell,k}$, il en résulte que $i_{\ell,k}$ est un morphisme

de E_k dans E_ℓ . On a donc $i_{\ell,k} S_k$ contenu dans S_ℓ , d'où, S_ℓ étant fermé, $\overline{i_{\ell,k} S_k}$ contenu dans S_ℓ ; par ailleurs $S_\ell = \overline{i_\ell S_0} = \overline{i_{\ell,k}(i_k S_0)}$ est contenu dans $\overline{i_{\ell,k} S_k}$ puisque S_k contient $i_k S_0$. Les deux inclusions entraînent l'égalité de S_ℓ et de $\overline{i_{\ell,k} S_k}$.

Il résulte des corollaires 4.5 et 4.6 que l'application qui à un objet $\{E_k\}_{k=0}^r$ de $\underline{C}_r$ associe l'objet $E_k = (E_k, S_k)$ de $\underline{V}$ se prolonge en un foncteur $V_{k,r}$ de $\underline{C}_r$ dans $\underline{V}$ et que les applications d'inclusion définissent des transformations naturelles $i_{\ell,k} : V_{k,r} \rightarrow V_{\ell,r}$.

Proposition 4.7. - Le foncteur $V_{k,r}$ de $\underline{C}_r$ dans $\underline{V}$ commute aux produits finis.

Soient $\{E'_k\}_{k=0}^r$ et $\{E''_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{C}_r$, $\{E_k\}_{k=0}^r$ leur produit. Les projections $\{p'_k\}_{k=0}^r$ et $\{p''_k\}_{k=0}^r$ sont des morphismes de $\underline{C}_r$; les applications p'_k et p''_k définissent donc des morphismes de E_k dans E'_k et E''_k et l'application identité de $E_k = E'_k \times E''_k$ définit un morphisme de E_k dans $E'_k \times E''_k$. De même, les injections canoniques $\{i'_k\}_{k=0}^r$ de $\{E'_k\}_{k=0}^r$ dans $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{i''_k\}_{k=0}^r$ de $\{E''_k\}_{k=0}^r$ dans $\{E_k\}_{k=0}^r$ sont des morphismes de $\underline{C}_r$; elles définissent donc des morphismes de E'_k et de E''_k dans E_k , d'où il résulte dans la catégorie additive $\underline{V}$ que l'application identité de $E'_k \times E''_k$ est un morphisme de $E'_k \times E''_k$ dans E_k . $\square$

A partir des catégories $\underline{C}_r$ de chaînes finies, on peut introduire différentes catégories de chaînes infinies.

La première, que nous noterons $\underline{C}_\infty$ est la limite projective des catégories $\underline{C}_r$ relativement aux foncteurs $I_r : \underline{C}_r \rightarrow \underline{C}_{r-1}$ envoyant une chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ sur la chaîne $\{E_k\}_{k=0}^{r-1}$. Un objet de $\underline{C}_\infty$ est une famille $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'espaces de Banach telle que pour $k \leq \ell$ l'espace vectoriel sous-jacent à E_k soit un sous-espace de l'espace vectoriel sous-jacent à E_ℓ et

que l'application d'inclusion de E_k dans E_ℓ soit continue et d'image dense ; un morphisme d'une chaîne $\{E_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans une chaîne $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues u_k de E_k dans F_k telles que $u_k = u_\ell|_{E_k}$ pour $k \leq \ell$.

Introduisons la notation $\underline{\underline{C}}^r$ pour la catégorie $\underline{\underline{C}}_r$ où l'on a procédé au changement de notations suivant : une chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ sera notée $\{E^k\}_{k=0}^r$ avec $E^k = E_{r-k}$ et un morphisme $\{u_k\}_{k=0}^r$ sera noté $\{u^k\}_{k=0}^r$ avec $u^k = u_{r-k}$. La seconde catégorie de chaînes infinies, que nous noterons $\underline{\underline{C}}^\infty$, est la limite projective des catégories $\underline{\underline{C}}^r$ relativement aux foncteurs $J^r : \underline{\underline{C}}^r \rightarrow \underline{\underline{C}}^{r-1}$ envoyant une chaîne $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sur la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^{r-1}$. Un objet de $\underline{\underline{C}}^\infty$ est une famille $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'espaces de Banach telle que pour $k \geq \ell$ l'espace vectoriel sous-jacent à E^k soit un sous-espace de l'espace vectoriel sous-jacent à E^ℓ et que l'application d'inclusion de E^k dans E^ℓ soit continue et d'image dense un morphisme d'une chaîne $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans une chaîne $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille $\{u^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ d'applications linéaires continues u^k de E^k dans F^k telles que $u^k = u^\ell|_{E^k}$ pour $k \geq \ell$.

Il est clair que les foncteurs $V_{k,r}$ de $\underline{\underline{C}}_r$ dans $\underline{\underline{V}}$ commutent avec les foncteurs $I_r : \underline{\underline{C}}_r \rightarrow \underline{\underline{C}}_{r-1}$ et donnent par passage à la limite des foncteurs V_k de $\underline{\underline{C}}_\infty$ dans $\underline{\underline{V}}$ dont la description est immédiate. Par contre, ces foncteurs ne commutent pas avec les foncteurs $J^r : \underline{\underline{C}}^r \rightarrow \underline{\underline{C}}^{r-1}$; il est cependant possible de définir de manière naturelle des foncteurs V^k de $\underline{\underline{C}}^\infty$ dans $\underline{\underline{V}}$ de la manière suivante : V^k associe à une chaîne $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ l'objet $\mathbb{E}^k = (E^k, \overline{i^k B^\infty})$ de $\underline{\underline{V}}$ où B^∞ est la famille des parties bornées de l'intersection E^∞ des espaces E^k , munie de la topologie limite. Les chaînes que nous rencontrerons vérifient la propriété suivante :

(S) si k_1 et k_2 sont strictement supérieurs à ℓ , on a

$i_{\ell, k_1, k_1}^{k_1} = i_{\ell, k_2, k_2}^{k_2}$ où B^{k_1} (resp. B^{k_2}) est la famille des parties
bornées de E^{k_1} (resp. E^{k_2}).

Nous noterons respectivement $\underline{\underline{SC}}^r$ et $\underline{\underline{SC}}^\infty$ les sous-catégories pleines de $\underline{\underline{C}}^r$ et de $\underline{\underline{C}}^\infty$ des chaînes vérifiant la condition (S). Les sous-catégories $\underline{\underline{SC}}^r$ sont stables pour les foncteurs J^r et $\underline{\underline{SC}}^\infty$ est la limite projective des catégories $\underline{\underline{SC}}^r$ relativement aux foncteurs J^r ; il est clair que les restrictions des foncteurs $V^{k,r}$ aux sous-catégories $\underline{\underline{SC}}^r$ commutent avec les foncteurs J^r et que la restriction de V^k à $\underline{\underline{SC}}^\infty$ est la limite projective des $V^{k,r}$.

§ 5 - APPLICATIONS DERIVABLES.

Définition 5.1. - Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{C}_r$, j_k l'application d'inclusion de F_0 dans F_k , Ω un ouvert de E_0 , f une application de Ω dans F_0 et s un entier tel que $0 \leq s \leq r$. Nous dirons que l'application f est de classe D^s relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ si

-i- pour tout entier t vérifiant $0 \leq t \leq s$ l'application $j_t \circ f$ de Ω dans F_t est différentiable de classe C^t ;

-ii- il existe pour tous entiers t et k vérifiant $1 \leq t \leq s$ et $1 \leq k \leq r-t+1$ une application $\delta_k^t f$ de Ω dans $L^t(E_k; F_{k+t-1})$ continue et localement bornée, telle que pour tout point x de Ω l'application t -linéaire $\delta_k^t f(x)$ prolonge $d^t[j_t \circ f](x)$.

Remarque 5.2. - Une application f est de classe D^0 si et seulement si elle est continue : cela résulte de la condition -i-, la condition -ii- étant vide pour $s = 0$.

Remarque 5.3. - Si $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ sont des espaces de Banach, c'est-à-dire si $E_k = E_0$ et $F_k = F_0$ quel que soit l'indice k , la condition -i- se réduit à la condition que f soit de classe C^s et la condition -ii- est automatiquement vérifiée. Pour les espaces de Banach, il y a donc coïncidence entre les notions d'application de classe C^s et d'application de classe D^s .

Théorème 5.4. - Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{C}_r$ et u une application linéaire et continue de E_0 dans F_0 . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i- L'application u est de classe D^r .
- ii- L'application u est de classe D^1 .

-iii- L'application u définit un morphisme de $\{E_k\}_{k=0}^r$ dans $\{F_k\}_{k=0}^r$

Il est évident que -i- entraîne -ii-.

Si u est de classe D^1 , les applications $u_k = \delta_k^1 u(0)$ de E_k dans F_k sont des extensions continues de u qui définit donc un morphisme de $\{E_k\}_{k=0}^r$ dans $\{F_k\}_{k=0}^r$.

Si u est un morphisme, ses extensions u_k appartiennent d'après le corollaire 4.5 à $L(E_k; F_k)$, ce qui permet de poser $\delta_k^1 u(x) = u_k$ et $\delta_k^t u(x) = 0$ pour $t \geq 1$: l'application linéaire continue $j_t \circ u$ est de classe C^t et $\delta_k^t u(x)$ prolonge $d^t[j_t \circ u](x)$, c'est-à-dire que u est une application de classe D^r $\square$

Théorème 5.5.- Soient $\{E'_k\}_{k=0}^r$, $\{E''_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ trois objets de $\underline{C}_r$ et u une application bilinéaire continue de $E'_0 \times E''_0$ dans F_0 . L'application u est de classe D^1 relativement à la chaîne produit $\{E_k\}_{k=0}^r = \{E'_k\}_{k=0}^r \times \{E''_k\}_{k=0}^r$ si et seulement si, pour tout indice k , l'application u s'étend en des applications bilinéaires continues u'_k de $E'_0 \times E''_k$ dans F_k et u''_k de $E'_k \times E''_0$ dans F_k ; l'application u est de classe D^r , avec $r \geq 2$, si et seulement si elle est de classe D^1 et elle s'étend en des applications bilinéaires continues u_k de $E'_k \times E''_k$ dans F_{k+1} pour tout $k \geq r-1$.

Si u est de classe D^1 les applications définies par

$$u'_k(x, Y) = \delta_k^1 u(x, 0) \cdot (0, Y)$$

$$u''_k(X, y) = \delta_k^1 u(0, y) \cdot (X, 0)$$

sont des extensions de u , continues d'après le corollaire 3.8. Réciproquement l'application u'_k définit une application continue $\bar{u}'_k$ de E'_0 dans $L(E''_k; F_k)$. L'application linéaire $\bar{u}'_k(x)$ étant une extension de $u(x, \cdot)$ appartient à $L(E''_k; F_k)$ d'après le lemme 4.4 et l'application que nous notons encore $\bar{u}'_k$ de E'_0 dans $L(E''_k; F_k)$ est continue et localement bornée puisque la topologie de cet espace est moins fine que la topologie de la norme. On définit de même une

application continue et localement bornée $\bar{u}_k''$ de E_0'' dans $L(E_k'; F_k)$ et l'on pose $\delta_k^1 u(x, y) = \bar{u}_k'(x) \oplus \bar{u}_k''(y)$; il est alors évident que u est une application de classe D^1 .

Si u est de classe D^r , avec $r \geq 2$, l'application définie par

$$u_k(X, Y) = \delta_k^2 u(0, 0) \cdot (X, 0, 0, Y)$$

est une extension continue de u . Réciproquement, il suffit de montrer que l'application bilinéaire

$$v_k(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = u_k(X_1, Y_2) + u_k(X_2, Y_1)$$

appartient à $L(E_k', E_k''; F_{k+1})$ et de poser $\delta_k^2 u(x, y) = v_k$ et $\delta_k^t u(x, y) = 0$

pour $t > 2$. L'application u_k définit une application linéaire continue $\bar{u}_k$ de E_k' dans $L(E_k''; F_{k+1})$; l'application linéaire $\bar{u}_k(X)$ étant une extension de l'application composée

$$E_0'' \xrightarrow{\bar{u}_k''(x)} F_k \xrightarrow{j} F_{k+1}$$

appartient à $L(E_k''; F_{k+1})$ d'après le lemme 4.4 et $\bar{u}_k$ est une application linéaire continue de E_k' dans $L(E_k''; F_{k+1})$; cette application prolongeant l'application composée

$$E_0' \xrightarrow{\bar{u}_k'} L(E_k''; F_k) \xrightarrow{j_*} L(E_k''; F_{k+1})$$

appartient à $L(E_k'; L(E_k''; F_{k+1}))$ ce qui entraîne par la proposition 3.6 que u_k appartient à $L(E_k', E_k''; F_{k+1})$, d'où le résultat pour v_k $\square$

Exemple. Soit P^r l'espace de Banach des fonctions numériques de classe C^r , définies sur le cercle ; pour tout couple d'entiers (r, s) le produit de convolution définit une application bilinéaire continue de $P^r \times P^s$ dans P^{r+s} . Nous supposons $r \leq s$ et prenons pour source du produit de convolution u la chaîne produit $\{E_k\}_{k=0}^r = \{E_k' \times E_k''\}_{k=0}^r$ définie par $E_k' = P^{r-k}$ et $E_k'' = P^{s-k}$. Si l'on prend pour but de u la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$ définie par $F_k = P^{r+s-k}$, u est de classe D^1 mais n'est pas de classe D^2 , sauf si

$r = 2$, puisque u n'admet pas d'extension de $P^{r-k} \times P^{s-k}$ dans $P^{r+s-k-1}$ pour $k > 1$; si l'on prend pour but de u la chaîne $\{G_k\}_{k=0}^r$ définie par $G_k = P^{r+s-2k+2}$ pour $k \geq 2$, $G_1 = P^{r+s-1}$, $G_0 = P^{r+s}$, l'application u est alors de classe D^r .

Théorème 5.6.- (Formule de Taylor) Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{C}_r$, Ω un ouvert de E_0 et f une application de Ω dans F_0 . Les propositions suivantes sont équivalentes :

-i- L'application f est de classe D^s .

-ii- Il existe pour tous entiers α et k vérifiant $1 \leq \alpha \leq s$ et $1 \leq k \leq r-\alpha+1$ une application continue et localement bornée a_k^α de Ω dans $L^\alpha(E_k; F_{k+\alpha+1})$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. $a_k^\alpha(x)$ est un plongement de $a_1^\alpha(x)$.

2. Pour tout entier t vérifiant $1 \leq t \leq s$ il existe un voisinage U^t de $\Omega \times \{0\}$ dans $E_0 \times E_0$ et une application continue et localement bornée ε^t de U^t dans $L^t(E_1; F_t)$ tels que l'on ait

$$\varepsilon^t(x, 0) = 0$$

et, pour tout point (x, X) de U^t , l'identité

$$j_t \circ f(x+X) - j_t \circ f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} a_{t-\alpha+1}^\alpha(x) \cdot (i_{t-\alpha+1} X)^\alpha + \varepsilon^t(x, X) \cdot (i_1 X)^t$$

Si l'application f est de classe D^s , pour tout entier $t \leq s$, l'application $j_t \circ f$ est de classe C^t et nous pouvons écrire la formule de Taylor à l'ordre t pour cette application

$$j_t \circ f(x+X) - j_t \circ f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} d^\alpha [j_t \circ f](x) \cdot (X)^\alpha + \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{t-1}}{(t-1)!} \left[d^t [j_t \circ f](x+\tau X) - d^t [j_t \circ f](x) \right] \cdot (X)^t d\tau$$

Les propriétés de prolongement des différentielles de $j_t \circ f$ permettent de remplacer dans cette expression $d^\alpha [j_t \circ f](x)$ par $\delta_{t-\alpha+1}^\alpha f(x) \circ (i_{t-\alpha+1})$; par ailleurs, l'espace $L^t(E_1; F_t)$ étant localement convexe, séparé et complet, nous

pouvons calculer l'intégrale

$$\varepsilon^t(x, X) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{t-1}}{(t-1)!} \left[\delta_1^t f(x+X) - \delta_1^t f(x) \right] d\tau$$

et l'application ε^t est continue et localement bornée puisque $\delta_1^t f$ l'est par hypothèse. Il vient alors

$$j_t \circ f(x+X) - j_t \circ f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta_{t-\alpha+1}^\alpha f(x) \cdot (i_{t-\alpha+1} X)^\alpha + \varepsilon^t(x, X) \cdot (i_1 X)^t$$

d'où la proposition -ii- en posant $a_k^\alpha(x) = \delta_k^\alpha f(x)$. C'est cette expression de $j_t \circ f(x+X) - j_t \circ f(x)$ que l'on appellera la formule de Taylor à l'ordre t pour l'application f .

Si f vérifie la proposition -ii-, considérons l'application composée

$$E^t : U^t \xrightarrow{\varepsilon^t} L^t(E_1; F_t) \xrightarrow{[(i_1)^t]^*} L^t(E_0; F_t) ;$$

cette application est continue et, E_0 étant un espace de Banach, $L^t(E_0; F_t)$ s'identifie à un sous-espace fermé de l'espace de Banach $L^t(E_0; F_t)$; si l'on note $A_t^\alpha(x)$ l'application α -linéaire de E_0 dans F_t définie par $A_t^\alpha(x) = a_{t-\alpha+1}^\alpha(x) \circ (i_{t-\alpha+1})^\alpha$ on a

$$j_t \circ f(x+X) - j_t \circ f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} A_t^\alpha(x) \cdot (X)^\alpha + E^t(x, X) \cdot (X)^t$$

ce qui entraîne, par la réciproque de la formule de Taylor [2], que l'application $j_t \circ f$ est de classe C^t et que $d^t[j_t \circ f](x)$ qui est le symétrisé $S[A_t^t(x)]$ de $A_t^t(x) = a_1^t(x) \circ (i_1)^t$ admet des extensions $\delta_k^t f(x) = S[a_k^t(x)]$, d'où il résulte que f est de classe D^S $\square$

Théorème 5.7.- L'application composée de deux applications de classe D^S est une application de classe D^S .

Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$, $\{F_k\}_{k=0}^r$, et $\{G_k\}_{k=0}^r$ trois objets de $\underline{C}_r$, f une application de classe D^S d'un ouvert de E_0 à valeurs dans F_0 , g une application de classe D^S d'un ouvert de F_0 à valeurs dans G_0 . Le théorème est évident pour $s = 0$. Pour un entier t vérifiant $1 \leq t \leq s$ écrivons la

formule de Taylor à l'ordre t pour l'application g :

$$k_t \log(y+Y) - k_t \log(y) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta_{t-\alpha+1}^\alpha g(y) \cdot (j_{t-\alpha+1} Y)^\alpha + \varepsilon(y, Y) \cdot (j_1 Y)^t$$

où ε est une application continue et localement bornée à valeurs dans

$L^t(\mathbb{F}_1; \mathbb{G}_t)$. On remplace dans cette expression y par $f(x)$, Y par $f(x+X)-f(x)$

et $j_k Y$ par l'expression fournie par la formule de Taylor à l'ordre k pour l'application f :

$$j_k Y = j_k \circ f(x+X) - j_k \circ f(x) = \sum_{\beta=1}^k \frac{1}{\beta!} \delta_{k-\beta+1}^\beta f(x) \cdot (i_{k-\beta+1} X)^\beta + \varepsilon^k(x, X) \cdot (i_1 X)^k.$$

En développant, on met en évidence deux parties :

1) Une partie régulière qui peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{\beta=1}^t \frac{1}{\beta!} a_{t-\beta+1}^\beta(x) \cdot (i_{t-\beta+1})^\beta$$

en posant, pour k vérifiant $1 \leq k \leq t-\beta+1$

$$a_k^\beta(x) = \sum_{\alpha=1}^{\beta} \frac{1}{\alpha!} \delta_{k+\beta-\alpha}^\alpha g(f(x)) \circ \sum_{\beta_1+\dots+\beta_\alpha=\beta} \frac{\beta!}{\beta_1! \dots \beta_\alpha!} \left[\prod_{\ell=1}^{\alpha} \delta_{k+\beta-\beta_\ell}^{\beta_\ell} f(x) \circ (i_{k+\beta-\beta_\ell}^{\beta_\ell})^{\beta_\ell} \right]$$

L'application a_k^β à valeurs dans $L^\beta(\mathbb{E}_k; \mathbb{F}_{k+\beta-1})$ est continue et localement bornée d'après le corollaire 3.10 et il est clair que $a_k^\beta(x)$ est un prolongement de $a_1^\beta(x)$.

2) une partie non régulière comportant des termes de deux sortes

2.1. des termes de la forme

$$\frac{1}{\alpha!} \delta_{t-\alpha+1}^\alpha g(f(x)) \circ \left[\prod_{\ell=1}^{\alpha} \frac{1}{\beta_\ell!} \delta_{t-\alpha-\beta_\ell+2}^{\beta_\ell} f(x) \circ (i_{t-\alpha-\beta_\ell+2}^{\beta_\ell})^{\beta_\ell} \right] \cdot (i_1 X)^\beta$$

avec $\beta = \beta_1 + \dots + \beta_\alpha$ strictement supérieur à t . D'après la proposition 3.6 et les corollaires 3.8 et 3.10 l'ensemble de ces termes peut s'écrire sous la forme

$$\varepsilon_1(x, X) \cdot (i_1 X)^t$$

avec ε_1 application continue et localement bornée à valeurs dans $L^t(\mathbb{E}_1; \mathbb{G}_t)$, nulle si $X = 0$.

2.2. des termes d'une forme analogue, de degré supérieur ou égal à t , mais où interviennent les fonctions $\varepsilon(f(x), f(x+X)-f(x))$ et $\varepsilon^k(x, X)$;

on peut encore regrouper ces termes sous la forme

$$\varepsilon_2(x, X) \cdot (i_1 X)^t$$

avec ε_2 application continue et localement bornée à valeurs dans $L^t(E_1; \mathbb{G})$, nulle si $X = 0$.

Il résulte de cette étude que l'application gof vérifie la proposition -ii- du théorème 5.6 et qu'elle est donc de classe D^S . L'expression de $a_k^\beta(x)$ nous donne par ailleurs $\delta_k^\beta[\text{gof}](x)$ puisque $a_k^\beta(x)$ est symétrique. En particulier, on a

$$\delta_k^1[\text{gof}](x) = \delta_k^1 g(f(x)) \circ \delta_k^1 f(x) \quad \square$$

La définition des applications de classe D^r s'adapte sans difficulté par simple ré-indexation, aux objets de la catégorie $\underline{C}^r$. Les exemples que nous développerons dans les chapitres suivants seront d'ailleurs de ce type.

L'extension de la notion d'application dérivable au cas des chaînes infinies résulte d'un simple passage à la limite ; nous allons étudier plus particulièrement le cas de la catégorie $\underline{C}^\infty$. La définition 5.1 ne peut s'étendre directement que si l'on connaît une théorie de différentiabilité entre espaces localement convexes ; plutôt que de choisir une telle théorie, nous préférons partir des propositions équivalentes du théorème 5.6 :

Définition 5.8. - Soient $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux objets de $\underline{C}^\infty$, Ω un ouvert de E^∞ et f une application continue de Ω dans F^∞ . Nous dirons que l'application f est de classe D^S relativement aux chaînes $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ s'il existe

1) pour tous entiers α et k vérifiant $1 \leq \alpha \leq s$ et $k \geq \alpha - 1$ une application continue et localement bornée $\delta_k^\alpha f$ de Ω dans $L^\alpha(E^k; F^{k-\alpha+1})$;

2) pour tout entier t vérifiant $1 \leq t \leq s$ un voisinage U^t de $\Omega \times \{0\}$ dans $E^\infty \times E^\infty$ et pour tout k vérifiant $k \geq t - 1$ une application

continue et localement bornée ε_k^t de U^t dans $L^t(\mathbb{E}^k; \mathbb{F}^{k-t+1})$; ces données étant telles que

- i- pour tout point x de Ω l'application $\delta_k^\alpha f(x)$ soit la restriction de $\delta_{\alpha-1}^\alpha f(x)$;
- ii- pour tout point (x, X) de U^t l'application $\varepsilon_k^t(x, X)$ soit la restriction de $\varepsilon_{t-1}^t(x, X)$;
- iii- pour tout point x de Ω on ait $\varepsilon_k^t(x, 0) = 0$;
- iv- pour tout indice k et tout point (x, X) de U^t on ait

$$j^k \circ f(x+X) - j^k f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta_{k+\alpha-1}^\alpha f(x) \cdot (i^{k+\alpha-1} X)^\alpha + \varepsilon_{k+t-1}^t(x, X) \cdot (i^{k+t-1} X)^t$$

où i^k (resp. j^k) est l'injection de E^∞ dans E^k (resp. de F^∞ dans F^k).

Remarque 5.9. - Si X est assez petit pour que $(x, \lambda X)$ soit contenu dans U^t quel que soit λ dans l'intervalle $[0, 1]$, la formule -iv- entraîne que $j^k \circ f(x + \lambda X)$ est de classe C^t par rapport à λ , ce qui permet de poser

$$\varepsilon_k^t(x, X) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{t-1}}{(t-1)!} [\delta_k^t f(x + \tau X) - \delta_k^t f(x)] d\tau$$

cette intégrale étant à valeurs dans l'espace localement convexe, séparé et complet $L^\alpha(\mathbb{E}^k; \mathbb{F}^{k-t+1})$. Il est alors facile de vérifier que -ii- et -iv- demeurent vrais sur le voisinage

$$U = \{(x, X) \mid x + [0, 1]X \subset \Omega\}$$

de $\Omega \times \{0\}$ dans $E^\infty \times E^\infty$.

Les théorèmes 5.4, 5.5 et 5.7 s'étendent naturellement au cas des applications dérivables entre objets de $\underline{\mathbb{C}}^\infty$. Cependant, nous n'auront pas à étudier directement ces applications : tous les exemples que nous en rencontrerons seront limite d'applications dérivables entre des chaînes finies vérifiant la condition (S), et l'on a dans ce cas le résultat suivant

Proposition 5.10. - Soient $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux objets de $\underline{\underline{SC}}^\infty$, Ω^r un ouvert de E^r et pour tout indice h supérieur ou égal à r une application f^h de $\Omega^h = E^h \cap \Omega^r$ dans F^h telle que f^{h+1} soit la restriction de f^h ; la famille d'applications $\{f^h\}_{h \geq r}$ définit une application f^∞ de $\Omega^\infty = E^\infty \cap \Omega^r$ dans F^∞ . Si chacune des applications f^h est de classe D^S relativement aux chaînes $\{E^k\}_{k=0}^h$ et $\{F^k\}_{k=0}^h$, alors l'application f^∞ est de classe D^S relativement aux chaînes $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Les chaînes $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ étant par hypothèse des objets de $\underline{\underline{SC}}^\infty$, la fermeture dans $P(E^k)$ (resp. $P(F^k)$) de la famille des parties bornées de E^∞ (resp. F^∞) coïncide avec la fermeture de la famille des parties bornées d'un E^h (resp. F^h) pour $h > k$. Il en résulte que la différentielle $\delta_k^\alpha f^h$ prend ses valeurs dans $L^\alpha(E^k; F^{k-\alpha+1})$ et que l'on peut poser

$$\delta_k^\alpha f^\infty = \delta_k^\alpha f^h \circ i^h$$

dès que h est strictement supérieur à k . La formule de Taylor à l'ordre t pour f^{k+t} en un point $(i^{k+t}x, i^{k+t}X)$ s'écrivant

$$j^{k,k+t} \circ f^{k+t} \circ i^{k+t}(x+X) - j^{k,k+t} \circ f^{k+t} \circ i^{k+t}(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta_{k+\alpha-1}^\alpha f^{k+t} \circ i^{k+t}(x) \cdot [i^{k+\alpha-1}X]^\alpha + \left\{ \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{t-1}}{(t-1)!} \left[\delta_{k+t-1}^t f^{k+t} \circ i^{k+t}(x+\tau X) - \delta_{k+t-1}^t f^{k+t} \circ i^{k+t}(x) \right] d\tau \right\} \cdot [i^{k+t-1}X]^t$$

nous pouvons poser

$$\epsilon_k^t(x, X) = \int_0^1 \frac{(1-\tau)^{t-1}}{(t-1)!} \left[\delta_k^t f^\infty(x+\tau X) - \delta_k^t f^\infty(x) \right] d\tau$$

et l'on a bien l'identité

$$j^k \circ f^\infty(x+X) - j^k \circ f^\infty(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta_{k+\alpha-1}^\alpha f^\infty(x) \cdot [i^{k+\alpha-1}X]^\alpha + \epsilon_{k+t-1}^t(x, X) \cdot [i^{k+t-1}X]^t$$

pour tout couple (x, X) tel que $x + [0, 1]X$ soit contenu dans Ω^∞ $\square$

Remarque 5.11. - Soient $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux objets de $\underline{\underline{SC}}^\infty$ et Ω un ouvert de E^∞ . L'ensemble des applications de Ω dans F^∞ limite

d'applications de classe D^S entre des sous-chaînes finies est un sous-ensemble strict de l'ensemble de toutes les applications de classe D^S : cela résulte de l'exemple suivant d'une application f de classe D^∞ qui n'admet pour aucun indice k une extension f^k .

Exemple. Soit E^k l'espace des fonctions numériques d'une variable réelle, continues et décroissant plus vite que $e^{-k|x|}$ à l'infini ; E^k est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}} e^{k|x|} |f(x)|$$

et $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est un objet de $\underline{SC}^\infty$ (un élément de $\underline{S}_{E^k}$ est une famille Φ d'applications telles que $e^{k|x|} f(x)$ tende vers zéro lorsque x tend vers l'infini, uniformément par rapport à f lorsque f parcourt Φ). Le produit de convolution définit des applications bilinéaires continues

$$\begin{aligned} E^n \times E^p &\rightarrow E^p & \text{si} & \quad n > p \geq 0 \\ E^n \times E^n &\rightarrow E^{n-1} & \text{si} & \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

d'où, par passage à la limite, une application bilinéaire continue de $E^\infty \times E^\infty$ dans E^∞ qui est de classe D^∞ relativement à la chaîne produit $\{E^k \times E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et à la chaîne $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

Remarque 5.12. Soient $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux objets de $\underline{C}^\infty$, Ω un ouvert de E^∞ et f une application de classe D^S de Ω dans F^∞ . Pour tout point x de Ω la famille $\{\delta_k^\alpha f(x)\}_{k \geq \alpha-1}$ d'applications α -linéaires continues définit une application α -linéaire continue $\delta^\alpha f(x)$ de $(E^\infty)^\alpha$ dans F^∞ ; de même, pour tout point (x, X) de U^t la famille $\{\varepsilon_k^t(x, X)\}_{k \geq t-1}$ d'applications t -linéaires continues définit une application t -linéaire continue $\varepsilon^t(x, X)$ de $(E^\infty)^t$ dans F^∞ . La condition -iv- de la définition 5.8 est alors équivalente à la condition suivante

$$\text{-iv'-} \quad f(x+X) - f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta^\alpha f(x) \cdot (X)^\alpha + \varepsilon^t(x, X) \cdot (X)^t$$

pour tout point (x, X) de U^t et tout $t \leq s$. Par ailleurs les applications

$$\widetilde{\delta^\alpha f} : \Omega \times (E^\infty)^\alpha \rightarrow F^\infty \quad (x; X^1, \dots, X^\alpha) \rightsquigarrow \delta^\alpha f(x) \cdot (X^1, \dots, X^\alpha)$$

et

$$\widetilde{\varepsilon^t} : U^t \times (E^\infty)^t \rightarrow F^\infty \quad (x, X; X^1, \dots, X^t) \rightsquigarrow \varepsilon^t(x, X) \cdot (X^1, \dots, X^t)$$

sont continues : pour tout indice k on a en effet les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times (E^\infty)^\alpha & \xrightarrow{\widetilde{\delta^\alpha f}} & F^\infty \\ \downarrow 1_{\Omega} \times (i^{k+\alpha-1})^\alpha & & \downarrow j^k \\ \Omega \times (E^{k+\alpha-1})^\alpha & \xrightarrow{\widetilde{\delta_{k+\alpha-1}^\alpha f}} & F^k \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U^t \times (E^\infty)^t & \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon^t}} & F^\infty \\ \downarrow 1_{U^t} \times (i^{k+t-1})^t & & \downarrow j^k \\ U^t \times (E^{k+t-1})^t & \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon_k^t}} & F^k \end{array}$$

où $\widetilde{\delta_{k+\alpha-1}^\alpha f}$ et $\widetilde{\varepsilon_k^t}$ sont continues, ce qui permet de conclure puisque F^∞ est muni de la topologie initiale pour les applications j^k . Il en résulte que les applications $\delta^\alpha f$ et ε^t sont quasi-continues lorsque l'on munit les espaces d'applications multilinéaires continues entre E^∞ et F^∞ de leur quasi-topologie canonique [7] ce qui, joint à -iv'-, entraîne que f est une application de classe C^S entre les espaces localement convexes E^∞ et F^∞ , au sens donné à ce terme par A. Bastiani [3] ou par J.A. Leslie [9].

En fait, il est possible d'interpréter la théorie de dérivabilité pour les objets de $\underline{\underline{C}}^\infty$ comme une théorie de différentiabilité pour les espaces localement convexes limite de chaînes d'espaces de Banach, théorie strictement plus fine que les théories évoquées quelques lignes auparavant. Soient $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ deux objets de $\underline{\underline{C}}^\infty$ et soient E^∞ et F^∞ les espaces localement convexes limites de ces chaînes. Soit $L^\alpha(E^*; F^*)$ l'espace vectoriel des applications α -linéaires continues u de $(E^\infty)^\alpha$ dans F^∞ admettant pour tout $k \geq \alpha-1$ une extension continue u^k de $(E^k)^\alpha$ dans $F^{k-\alpha+1}$; d'après le lemme 4.4, l'application u^k appartient à $L^\alpha(E^k; F^{k-\alpha+1})$ et l'on munit $L(E^*; F^*)$ d'une quasi-topologie telle qu'une application ξ d'un espace topologique X

dans $L^\alpha(E^*; F^*)$ soit quasi-continue si et seulement si, pour tout k , l'application composée de ξ et de l'injection canonique de $L^\alpha(E^*; F^*)$ dans $L^\alpha(E^k; F^{k-\alpha+1})$ est continue et localement bornée. Une application f d'un ouvert Ω de E^∞ à valeurs dans F^∞ est de classe D^s relativement aux chaînes $\{E^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{F^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ si et seulement si elle est de classe C^s relativement aux espaces E^∞ et F^∞ et aux espaces d'applications $L^\alpha(E^*; F^*)$, c'est-à-dire s'il existe pour tout $\alpha \leq s$ une application quasi-continue $\delta^\alpha f$ de Ω dans $L^\alpha(E^*; F^*)$ et pour tout $t \leq s$ un voisinage U^t de $\Omega \times \{0\}$ dans $E^\infty \times E^\infty$ et une application quasi-continue ϵ^t de U^t dans $L^t(E^*; F^*)$ telle que

-i- pour tout point x de Ω on ait $\epsilon^t(x, 0) = 0$;

-ii- pour tout point (x, X) de U^t on ait

$$f(x+X) - f(x) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} \delta^\alpha f(x) \cdot (X)^\alpha + \epsilon^t(x, X) \cdot (X)^t .$$

§ 6 - REMARQUES D'ORDRE PRATIQUE.

Dans tout ce paragraphe nous considérons deux objets $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ de $\underline{C}_r$, un ouvert Ω dans F_0 .

Remarque 6.1. - Supposons que pour tout entier t vérifiant $0 \leq t \leq s$ l'application $j_t \circ f$ soit de classe C^t et qu'il existe des applications localement bornées $\delta_k^t f$ de Ω dans $L^t(E_k; F_{k+t-1})$ telles que $\delta_k^t f(x)$ prolonge $d^t[j_t \circ f](x)$. Alors les applications $\delta_k^t f$ sont nécessairement continues et l'application f est donc de classe D^s . Cela résulte du lemme suivant

Lemme 6.1.1. - Soient $E_k = (E_k, S_k), E'_k = (E'_k, S'_k)$ et $F = (F, S_F)$ des objets de $\underline{V}$, $i_k : E_k \rightarrow E'_k$ des morphismes tels que $S'_k = \overline{i_k S_k}$, X un espace topologique et f une application localement bornée de X dans $L(E'_1, \dots, E'_\alpha; F)$ telle que l'application composée $(i_1 \times \dots \times i_\alpha)^* \circ f$ de X dans $L(E_1, \dots, E_\alpha; F)$ soit continue. Si les espaces E'_k sont bornologiques l'application f est continue.

Nous allons étudier l'application f en un point x_0 . Cette application étant localement bornée, il existe un voisinage de x_0 dont l'image par f est bornée; en restreignant le domaine de définition de f nous pouvons supposer que f est bornée sur X . Les espaces E'_k étant bornologiques et complets sont tonnelés, et $f(X)$ est donc une famille $(B'_1, \dots, B'_\alpha)$ -équihypocontinue où B'_k est la famille des parties bornées de E'_k . Soient $V(A_1, \dots, A_\alpha; W)$ un voisinage fondamental de l'origine dans $L(E'_1, \dots, E'_\alpha; F)$ et W' un voisinage convexe de l'origine dans F tel que $(2\alpha+1)W'$ soit contenu dans W ; nous procédons par récurrence aux choix suivants :

a_1 . La famille $f(X)$ étant équihypocontinue, il existe un voisinage V_1 de l'origine dans E'_1 tel que

$$f(x) \cdot (V_1 \times A_2 \times \dots \times A_\alpha) \subset W'$$

quel que soit x de X ; l'égalité $S'_1 = \overline{i_1 S_1}$ entraîne alors qu'il existe un

élément B_1 de S_1 tel que A_1 soit contenu dans $i_1 B_1 + V_1$.

a_k . Il existe un voisinage V_k de l'origine dans E'_k tel que

$$f(x) \cdot (i_1 B_1 \times \dots \times i_{k-1} B_{k-1} \times V_k \times A_{k+1} \times \dots \times A_\alpha) \subset W'$$

quel que soit x de X ; il existe un élément B_k de S_k tel que A_k soit contenu dans $i_k B_k + V_k$.

On a alors

$$\begin{aligned} [f(x) - f(x_0)] \cdot (A_1 \times \dots \times A_\alpha) &\subset [f(x) - f(x_0)] \cdot ((i_1 B_1 + V_1) \times A_2 \times \dots \times A_\alpha) \\ &\subset [f(x) - f(x_0)] \cdot (i_1 B_1 \times A_2 \times \dots \times A_\alpha) + 2W' \end{aligned}$$

et pour un indice k quelconque

$$\begin{aligned} [f(x) - f(x_0)] \cdot (i_1 B_1 \times \dots \times i_{k-1} B_{k-1} \times A_k \times \dots \times A_\alpha) \\ \subset [f(x) - f(x_0)] \cdot (i_1 B_1 \times \dots \times i_{k-1} B_{k-1} \times (i_k B_k + V_k) \times A_{k+1} \times \dots \times A_\alpha) \\ \subset [f(x) - f(x_0)] \cdot (i_1 B_1 \times \dots \times i_k B_k \times A_{k+1} \times \dots \times A_\alpha) + 2W' \end{aligned}$$

d'où en définitive

$$[f(x) - f(x_0)] \cdot (A_1 \times \dots \times A_\alpha) \subset [f(x) - f(x_0)] \cdot (i_1 B_1 \times \dots \times i_\alpha B_\alpha) + 2\alpha W'$$

La continuité de $(i_1 \times \dots \times i_\alpha)^* \circ f$ entraîne qu'il existe un voisinage U de x_0 tel que pour x élément de U on ait $[f(x) - f(x_0)] \circ (i_1 \times \dots \times i_\alpha)$ élément de $V(B_1, \dots, B_\alpha; W')$; on a alors

$$[f(x) - f(x_0)] \cdot (A_1 \times \dots \times A_\alpha) \subset (2\alpha + 1)W' \subset W$$

soit encore $f(x) - f(x_0)$ élément de $V(A_1, \dots, A_\alpha; W)$, ce qui démontre la continuité de f $\square$

Remarque 6.2. - La condition pour f d'être une application de classe D^B prend une forme simplifiée lorsque $\{E_k\}_{k=0}^r$ ou (et) $\{F_k\}_{k=0}^r$ est une chaîne constante, c'est-à-dire s'identifie à un espace de Banach.

6.2.1. - Nous avons déjà remarqué (remarque 5.3) que si $\{E_k\}_{k=0}^r$ et

$\{F_k\}_{k=0}^r$ sont tous deux des espaces de Banach, une application de classe D^s n'est autre qu'une application de classe C^s .

6.2.2.- Si $\{E_k\}_{k=0}^r$ est un espace de Banach, l'application f est de classe D^s si et seulement si, pour tout entier t vérifiant $0 \leq t \leq s$, l'application $j_t \circ f$ est de classe C^t et si pour tout x l'application $d^t[j_t \circ f](x)$ transforme un borné de $(E)^t$ en un élément de S_{F_t} ; cette condition est nécessaire puisque l'on doit avoir $d^t[j \circ f](x) = \delta_1^t f(x)$; cette condition est suffisante parce que $L^t(E_k; F_{k+t-1}) = L^t(E; F_{k+t-1})$ s'identifiant à un sous-espace de l'espace de Banach $L^t(E; F_{k+t-1})$ (remarque 3.11.3) on peut poser $\delta_k^t f(x) = j_{k+t-1} \circ d^t[j_t \circ f](x)$.

6.2.3.- Si $\{E_k\}_{k=0}^r$ est un espace de dimension finie, $L^t(E; F_{k+t-1})$ s'identifie à $L^t(E; F_{k+t-1})$ (remarque 3.11.4) et la condition pour que f soit de classe D^s se réduit alors à : quel que soit t vérifiant $0 \leq t \leq s$, l'application $j_t \circ f$ est de classe C^t .

6.2.4.- Si $\{F_k\}_{k=0}^r$ est un espace de Banach, l'application f est de classe D^s si et seulement si f est de classe C^s et si, pour tout t vérifiant $0 \leq t \leq s$, il existe une application localement bornée $\Delta^t f(x)$ de Ω dans $L^t(E_{r-t+1}; F)$ telle que pour tout x l'application $\Delta^t f(x)$ prolonge $d^t f(x)$: on pose en effet $\delta_k^t f(x) = \Delta^t f(x) \circ (i_{r-t+1, k})^t$ qui appartient à $L^t(E_k; F)$ puisque l'espace vectoriel sous-jacent à cet espace est égal à l'espace de toutes les applications t -linéaires continues ; l'application $\delta_k^t f$ est localement bornée puisque $\Delta^t f$ l'est et elle est continue d'après la remarque 6.1.

Remarque 6.3.- L'application identité de E_0 est, d'après le théorème 5.4, une application de classe D^r de l'espace de Banach E_0 dans la chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ puisqu'elle admet pour tout indice k une extension continue i_k de E_0 dans E_k . Il en résulte que si f est de classe D^s relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$, l'application $f \circ 1_{E_0}$ est une application de classe D^s de l'espace de Banach E_0 dans la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$. Réciproquement

supposons que f soit de classe D^S relativement à l'espace de Banach E_0 et à la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$ et qu'il existe des applications localement bornées $d_k^t f$ de Ω dans $L^t(E_k; F_{k+t-1})$ telles que $d_k^t f(x)$ prolonge $d^t[j_t \circ f](x)$. Alors $d_k^t f$ se factorise en une application localement bornée $\delta_k^t f$ de Ω dans $L^t(E_k; F_{k+t-1})$ et d'après la remarque 6.1, l'application f est de classe D^S relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$. Cela résulte du lemme suivant et de ce que $d^t[j_t \circ f](x)$ appartient à $L^t(E_0; F_t)$ d'après la remarque 6.2.2.

Lemme 6.3.1.-Soient $E_k = (E_k, S_k)$, $E'_k = (E'_k, S'_k)$ et $F = (F, S_F)$ des objets de $\underline{V}$, $i_k : E_k \rightarrow E'_k$ un morphisme tel que $S_k = \overline{i_k S'_k}$, u une application α -linéaire S -bornée de $\prod_k E_k$ dans F et u' une application α -linéaire bornée de $\prod_k E'_k$ dans F telle que $u' \circ (i_1 \times \dots \times i_\alpha) = u$. Si les espaces E'_k sont bornologiques, u' est une application S -bornée.

Nous devons montrer que u' transforme tout produit $M_1 \times \dots \times M_\alpha$, avec M_k élément de S'_k , en un élément de S_F . Soient W un voisinage de l'origine de F et W' un voisinage convexe de l'origine tel que $\alpha W' \subset W$; nous procédons par récurrence aux choix suivants :

a_1 . L'application u' étant $(B'_1, \dots, B'_\alpha)$ -hypocontinue, il existe un voisinage V_1 de l'origine dans E'_1 tel que

$$u'(V_1 \times M_2 \times \dots \times M_\alpha) \subset W' ;$$

l'égalité $S'_1 = \overline{i_1 S_1}$ entraîne alors qu'il existe un élément N_1 de S_1 tel que M_1 soit contenu dans $i_1 N_1 + V_1$.

a_k . Il existe un voisinage V_k de l'origine dans E'_k tel que

$$u'(i_1 N_1 \times \dots \times i_{k-1} N_{k-1} \times V_k \times M_{k+1} \times \dots \times M_\alpha) \subset W' ;$$

il existe un élément N_k de S_k tel que M_k soit contenu dans $i_k N_k + V_k$.

On a alors

$$\begin{aligned} u'(M_1 \times \dots \times M_\alpha) &\subset u'((i_1 N_1 + V_1) \times M_2 \times \dots \times M_\alpha) \\ &\subset u'(i_1 N_1 \times M_2 \times \dots \times M_\alpha) + W' \end{aligned}$$

et pour un indice k quelconque

$$u'(i_{1N_1} \times \dots \times i_{kN_k} \times M_{k+1} \times \dots \times M_\alpha) \subset u'(i_{1N_1} \times \dots \times i_{k+1N_{k+1}} \times M_{k+2} \times \dots \times M_\alpha) + W'$$

d'où en définitive

$$u'(M_1 \times \dots \times M_\alpha) \subset u'(i_{1N_1} \times \dots \times i_{\alpha N_\alpha}) + {}_\alpha W' \subset u(N_1 \times \dots \times N_\alpha) + W$$

où $u(N_1 \times \dots \times N_\alpha)$ appartient à S_F puisque u est S -borné. Il en résulte que $u'(M_1 \times \dots \times M_\alpha)$ appartient à $\overline{S_F}$, donc à S_F puisque cette famille est fermée $\square$

Plaçons nous toujours dans l'hypothèse que f est de classe D^S relativement à l'espace de Banach E_0 et à la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$. Si f est de classe D^S relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$, l'application

$$\overbrace{d^t[j_t \circ f]} : \Omega \times (E_0)^t \rightarrow F_t \quad (x, X_1, \dots, X_t) \rightsquigarrow d^t[j_t \circ f](x) \cdot (X_1, \dots, X_t)$$

admet des extensions

$$\widetilde{\delta_k^t f} : \Omega \times (E_k)^t \rightarrow F_{k+t-1} \quad (x, X_1, \dots, X_t) \rightsquigarrow \delta_k^t f(x) \cdot (X_1, \dots, X_t)$$

qui sont des applications continues d'après le corollaire 3.8.

Réciproquement, s'il existe des extensions continues

$$D_k^t f : \Omega \times (E_k)^t \rightarrow F_{k+t-1}$$

de $\overbrace{d^t[j_t \circ f]}$, on en déduit des applications $d_k^t f$ de Ω dans $L^t(E_k; F_{k+t-1})$ telles que $d_k^t f(x)$ prolonge $d^t[j_t \circ f](x)$ et le lemme suivant entraîne que ces applications sont localement bornées et donc que f est de classe D^S relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$.

Lemme 6.3.2.- Soient X un espace topologique, E et F des espaces de Banach et Φ une application continue de $X \times (E)^\alpha$ dans F qui soit α -linéaire par rapport aux dernières variables. L'application ϕ de X dans $L^\alpha(E; F)$ qui à x de X associe l'application α -linéaire continue $\phi(x) = \Phi(x; \cdot)$ est localement bornée.

La continuité de ϕ en le point $(x_0, 0)$ entraîne qu'il existe un voisinage V de x_0 et un nombre positif η tel que $x \in V$ et $||X|| < \eta$ implique $||\phi(x; X)|| \leq 1$, soit, pour X quelconque, $||\phi(x; X)|| \leq \frac{||X||^\alpha}{\eta^\alpha}$. Il en résulte que $||\phi(x)||$ est inférieur à $\frac{1}{\eta^\alpha}$ quel que soit x de V , c'est-à-dire que ϕ est borné au voisinage de x $\square$

Remarque 6.4. - Supposons que f soit de classe D^1 . Il est clair que pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq r$, l'application f est de classe D^1 relativement aux objets $\{E_0, E_k\}$ et $\{F_0, F_k\}$ de $\underline{C}_2$; si g est une application d'un ouvert d'un espace de Banach E à valeurs dans E_0 , de classe D^1 relativement à l'espace de Banach E et à la chaîne $\{E_0, E_k\}$, l'application composée $f \circ g$ est de classe D^1 relativement à l'espace de Banach E et à la chaîne $\{F_0, F_k\}$.

Réciproquement, si f est telle que pour toute application g de classe D^1 d'un ouvert d'un espace de Banach E dans une chaîne $\{E_0, E_k\}$ l'application composée $f \circ g$ soit de classe D^1 de l'espace de Banach E dans la chaîne $\{F_0, F_k\}$, alors f est de classe D^1 relativement aux chaînes $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$. La démonstration de cette propriété repose sur l'existence de certains chemins de classe D^1 dans un objet de $\underline{C}_2$.

Lemme 6.4.1. - Soient E un espace de Banach, a, b, A, B des points de E et $[\alpha, \beta]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Quel que soit $\epsilon > 0$ il existe une application h de classe C^1 de $[\alpha, \beta]$ dans E vérifiant les propriétés suivantes

- i- $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$, $h(\alpha) = A$, $h(\beta) = B$;
- ii- la distance de $h(t)$ au segment $[a, b]$ est inférieure à ϵ ;
- iii- la norme de h est inférieure à $3 \sup(\frac{||b-a||}{\beta-\alpha}, ||A||, ||B||)$.

On pose

$$h(t) = \frac{1}{\beta-\alpha} [(\beta-t)a + (t-\alpha)b] + \lambda k(\phi(t))$$

où

$$k(t) = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \left[(t-\alpha)(\beta-t)^2 \left(A - \frac{b-a}{\beta-\alpha} \right) - (t-\alpha)^2(\beta-t) \left(B - \frac{b-a}{\beta-\alpha} \right) \right]$$

vérifie $k(\alpha) = k(\beta) = 0$, $\dot{k}(\alpha) = A - \frac{b-a}{\beta-\alpha}$, $\dot{k}(\beta) = B - \frac{b-a}{\beta-\alpha}$, λ est un nombre compris entre 0 et 1 tel que $\lambda ||k|| < \varepsilon$ et ϕ est une application croissante de $[\alpha, \beta]$ dans lui-même telle que $\phi(\alpha) = \alpha$, $\phi(\beta) = \beta$, $\dot{\phi}(\alpha) = \dot{\phi}(\beta) = \frac{1}{\lambda}$ et $||\phi|| = \frac{1}{\lambda}$. Il est clair que h vérifie les conditions -i- et -ii-. On a

$$\dot{h}(t) = \frac{b-a}{\beta-\alpha} + \lambda \dot{\phi}(t) \dot{k}(\phi(t))$$

d'où

$$||\dot{h}|| \leq \frac{||b-a||}{\beta-\alpha} + ||\dot{k}||;$$

par ailleurs

$$k(t) = \frac{\alpha+\beta-2t}{(\beta-\alpha)^2} [(\beta-t)A - (t-\alpha)B] - \frac{(t-\alpha)(\beta-t)}{(\beta-\alpha)^2} (A+B) + \frac{2(t-\alpha)(\beta-t) - (2t-\alpha-\beta)^2}{(\beta-\alpha)^2} \frac{b-a}{\beta-\alpha}$$

entraîne que

$$||\dot{k}|| \leq \frac{3}{2} \sup(||A||, ||B||) + \frac{1}{2} \frac{||b-a||}{\beta-\alpha},$$

d'où la condition -ii- pour h $\square$

Lemme 6.4.2.- Soient $\{E, E'\}$ un objet de $\underline{C}_2$, i l'injection de E dans E' , $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de points de E , $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres strictement positifs telle que $\sum_n \alpha_n < +\infty$ et que $\frac{||i(x_{n+1} - x_n)||}{\alpha_n}$ tende vers zéro, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E telle que la suite $\{iX_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l'origine dans E' . Il existe une application g de $\mathbb{R}$ dans E vérifiant les propriétés suivantes :

- i- g est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0\}$;
- ii- $i \circ g$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$;
- iii- g est constante sur $]-\infty, 0]$ et il existe une suite $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de $[0, \infty[$ convergeant vers 0 telle que $g(t_n) = x_n$ et $\dot{g}(t_n) = X_n$.

Soit $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite décroissante, tendant vers zéro, telle que

$t_n - t_{n+1} = \alpha_n$; une telle suite existe puisque $\sum_n \alpha_n < +\infty$. On considère l'application g définie de la manière suivante :

$g|]-\infty, 0]$ est l'application constante de valeur la limite de la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$;

$g| [t_{n+1}, t_n]$ est l'application fournie par le lemme 6.4.1 pour $a = x_{n+1}$, $b = x_n$, $A = X_{n+1}$, $B = X_n$, $\alpha = t_{n+1}$, $\beta = t_n$ et $\varepsilon = \frac{1}{n}$;

$g| [t_0, +\infty[$ est l'application affine $x_0 + X_0(t - t_0)$.

Il est évident que g est de classe C^1 sur $\mathbb{R} - \{0\}$. Pour t appartenant à $[t_{n+1}, t_n]$ la distance de $g(t)$ au segment $[x_{n+1}, x_n]$ étant inférieure à $\frac{1}{n}$ et la suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ayant une limite a , $g(t)$ tend vers a lorsque t tend vers zéro par valeurs positives, d'où la continuité de g au point 0 . Enfin, pour t appartenant à $[t_{n+1}, t_n]$ on a

$$||\frac{d}{dt}[\text{iog}](t)|| \leq 3 \sup\{\frac{||i(x_{n+1} - x_n)||}{\alpha}, ||iX_n||, ||iX_{n+1}||\}$$

d'où il résulte que $\frac{d}{dt}[\text{iog}](t)$ tend vers l'origine lorsque t tend vers zéro par valeurs positives, et que iog est donc de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ $\square$

Remarque 6.4.3 La remarque 6.2.3 entraîne que l'application g dont l'existence est démontrée au lemme 6.4.2 est une application de classe D^1 de l'espace de dimension finie $\mathbb{R}$ dans la chaîne (E, E') .

Nous allons appliquer cette construction à la démonstration de la caractérisation des applications de classe D^1 . Il vient tout de suite en faisant $g = 1_{E_0}$ qui est une application de classe D^1 de E_0 dans la chaîne $\{E_0, E_1\}$ que f est une application de classe D^1 de E_0 dans $\{F_0, F_1\}$ et donc dans la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$ tout entière (cf. la remarque 6.2.2). D'après la remarque 6.3 il suffit donc de montrer que pour tout x de Ω l'application $d[j_1 \circ f](x)$ admet des extensions $d_k f(x)$ de E_k dans F_k et que l'application $d_k f$ est localement bornée.

Si $d[j_1 \circ f](x)$ n'admettait pas d'extension de E_k dans F_k il existerait une suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de E_0 telle que $\{i_k X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite convergeant vers l'origine dans E_k et que $\{d[j_k \circ f](x) \cdot X_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{j_{k,1} \circ d[j_1 \circ f](x) \cdot X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'origine dans F_k . D'après le lemme 6.4.2 il existe une application g de classe D^1 de $\mathbb{R}$ dans $\{E_0, E_k\}$ telle que $g|]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ soit une application de classe C^1 et que l'on ait $g(\frac{1}{n}) = x$, $\dot{g}(\frac{1}{n}) = X_n$ et $g(t) = x$ pour $t \leq 0$. Par hypothèse $j_k \circ f \circ g$ est de classe C^1 et l'on doit avoir

$$\frac{d}{dt}[j_k \circ f \circ g](\frac{1}{n}) = d[j_k \circ f](x) \cdot \dot{g}(\frac{1}{n}) = d[j_k \circ f](x) \cdot X_n$$

et

$$\frac{d}{dt}[j_k \circ f \circ g](0) = 0$$

avec $\frac{d}{dt}[j_k \circ f \circ g]$ continue, ce qui est impossible.

Si $d_k f$ n'était pas localement bornée en un point a , il existerait une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E_0 telle que $\|a - x_n\| \leq \frac{1}{n^2}$ et une suite $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de points de E_0 telle que $\{i_k X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ soit une suite convergeant vers l'origine dans E_k et que $\{d_k f(x_n) \circ i_k X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers l'origine dans F_k . D'après le lemme 6.4.2 il existe une application g de classe D^1 de $\mathbb{R}$ dans $\{E_0, E_k\}$ telle que $g| \mathbb{R} - \{0\}$ soit une application de classe C^1 et que l'on ait $g(\frac{1}{n}) = x_n$, $\dot{g}(\frac{1}{n}) = X_n$ et $g(t) = a$ pour $t \leq 0$. Par hypothèse $j_k \circ f \circ g$ est de classe C^1 et l'on doit avoir

$$\frac{d}{dt}[j_k \circ f \circ g](\frac{1}{n}) = d[j_k \circ f](x_n) \cdot \dot{g}(\frac{1}{n}) = d_k f(x_n) \cdot i_k X_n$$

et

$$\frac{d}{dt}[j_k \circ f \circ g](0) = 0$$

avec $\frac{d}{dt}[j_k \circ f \circ g]$ continue, ce qui est impossible $\square$

§ 7 - VARIETES DERIVABLES.

Le théorème de composition des applications dérivables permet de développer sur le modèle classique une théorie des variétés de classe D^r modelées sur les objets de $\underline{C}_r$ et des applications de classe D^s , avec $0 \leq s \leq r$, entre variétés de classe D^r .

Définition 7.1. - Un atlas de classe D^r d'un espace topologique X est une famille $A = \{U_\alpha, \phi_\alpha, \{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r\}_{\alpha \in A}$ où $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de X , $\{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r$ un objet de $\underline{C}_r$, ϕ_α un homéomorphisme de U_α sur un ouvert de $E_{0;\alpha}$, telle que pour tout couple d'indice (α, β) l'application $\phi_{\beta,\alpha} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ dans $E_{0;\beta}$ soit de classe D^r relativement aux chaînes $\{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r$ et $\{E_{k;\beta}\}_{k=0}^r$. Deux atlas de classe D^r de X sont des atlas équivalents si leur réunion est encore un atlas de classe D^r . Un espace X muni d'une classe d'équivalence d'atlas est une variété de classe D^r .

Définition 7.2. - Une application entre deux variétés de classe D^r est une application de classe D^s si en tout point son expression en coordonnées locales est de classe D^s ; on doit avoir $0 \leq s \leq r$.

Remarque 7.3. - La catégorie des espaces de Banach s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\underline{C}_r$ et il y a identité entre les applications de classe C^r et les applications de classe D^r entre deux espaces de Banach; il en résulte que toute variété de classe C^r est une variété de classe D^r . Si $r = 0$, $\underline{C}_0$ est égale à la catégorie des espaces de Banach et les variétés de classe D^0 sont les variétés banachiques topologiques.

Considérons une variétés X de classe D^r , avec $r \geq 1$, et

$$A = \{U_\alpha, \phi_\alpha, \{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r\}_{\alpha \in A}$$

un atlas définissant la structure de variété de X . Pour tout couple d'indices (α, β) l'application

$$a_{k;\beta,\alpha} = \delta_h^1 \phi_{\beta,\alpha} \circ (\phi_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta})$$

de $U_\alpha \cap U_\beta$ dans $L(E_{h;\alpha}; E_{h;\beta})$ est continue et localement bornée et, pour x élément de $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ on a

$$\begin{aligned} a_{h;\gamma,\beta}(x) \circ a_{h;\beta,\alpha}(x) &= \delta_h^1 \phi_{\gamma,\beta}(\phi_\beta(x)) \circ \delta_h^1 \phi_{\beta,\alpha}(\phi_\alpha(x)) \\ &= \delta_h^1 \phi_{\gamma,\beta}(\phi_{\beta,\alpha}(\phi_\alpha(x))) \circ \delta_h^1 \phi_{\beta,\alpha}(\phi_\alpha(x)) \\ &= \delta_h^1 \phi_{\gamma,\alpha}(\phi_\alpha(x)) = a_{h;\gamma,\alpha}(x) \end{aligned}$$

d'après l'expression de la différentielle $\delta_h^1 \phi_{\gamma,\alpha} = \delta_h^1 [\phi_{\gamma,\beta} \circ \phi_{\beta,\alpha}]$ d'une fonction composée donnée au théorème 5.7. D'après le lemme 3.8 l'application

$$\psi_{h;\beta,\alpha} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h;\alpha} \rightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h;\beta} \quad (x, X) \mapsto (x, a_{h;\beta,\alpha}(x).X)$$

est continue et l'on a

$$\psi_{h;\gamma,\alpha} = \psi_{h;\gamma,\beta} \circ \psi_{h;\beta,\alpha}$$

sur le domaine commun de définition ; en recollant les $U_\alpha \times E_{h;\alpha}$ au moyen des applications $\psi_{h;\beta,\alpha}$ on obtient un espace fibré vectoriel $(T_h^A X, \tau_h^A, X)$. Si l'on remplace l'atlas A par un atlas équivalent A' , les fibrés $T_h^A X$ et $T_h^{A'} X$ sont canoniquement isomorphes à $T_h^{A \cup A'} X$; nous parlerons donc du fibré $T_h X$, définit à isomorphisme près, sans plus faire référence à un atlas de X .

Si l'on note $i_{h+1,h;\alpha}$ l'injection canonique de $E_{h;\alpha}$ dans $E_{h+1;\alpha}$ on a pour tout x dans $U_\alpha \cap U_\beta$, l'égalité

$$i_{h+1,h;\beta} \circ a_{h;\beta,\alpha}(x) = a_{h+1;\beta,\alpha}(x) \circ i_{h+1,h;\alpha}$$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h;\alpha} & \xrightarrow{\psi_{h;\beta,\alpha}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h;\beta} \\
 \downarrow 1_{U_\alpha \cap U_\beta} \times i_{h+1,h;\alpha} & & \downarrow 1_{U_\alpha \cap U_\beta} \times i_{h+1,h;\beta} \\
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h+1;\alpha} & \xrightarrow{\psi_{h+1;\beta,\alpha}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h+1;\beta} .
 \end{array}$$

Il en résulte que les applications $\{i_{h+1,h;\alpha}\}_{\alpha \in A}$ définissent un morphisme de fibrés $i_{h+1,h}$ de $T_h X$ dans $T_{h+1} X$, au-dessus de l'identité de la base X ; ce morphisme est injectif et d'image dense.

Définition 7.4. - Nous appellerons fibré tangent de la variété X la famille d'espaces fibrés et de morphismes $\{T_h X; i_{h+1,h}\}_{h=1}^r$.

Théorème 7.5. - Si X est une variété de classe D^r modelée sur des objets de $\underline{SC}_r$, l'espace total du fibré $T_h X$ est une variété de classe D^{r-h} modelée sur des objets de $\underline{SC}_{r-h}$; la projection, la section nulle, le produit par un scalaire, la somme vectorielle du fibré $T_h X$ sont des applications de classe D^{r-h} .

La construction de $T_h X$ à partir d'un atlas de X met en évidence des cartes locales

$$\theta_{h;\alpha} : \tau_h^{-1}(U_\alpha) \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \times E_{h;\alpha}$$

de l'espace $T_h X$ pour lesquelles les changements de cartes sont de la forme

$$\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h;\alpha} \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times E_{h;\beta} \quad (x, X) \mapsto (\phi_{\beta,\alpha}(x), \delta_h^1 \phi_{\beta,\alpha}(x).X) .$$

Etant donné un objet $\{E_k\}_{k=0}^r$ de $\underline{C}_r$ nous noterons $\{E_k^h\}_{k=0}^{r-h}$ l'objet de $\underline{C}_{r-h}$ définit par $E_h^h = E_{h+h}$; avec cette convention, l'image de la carte $\theta_{h;\alpha}$ est un ouvert de l'espace d'indice zéro de la chaîne produit $\{E_{k;\alpha} \times E_{k;\alpha}^h\}_{k=0}^{r-h}$. Les ap-

plications $\phi_{\beta,\alpha}$ étant de classe D^r , il résulte du lemme suivant que les changements de cartes pour $T_h X$ sont de classe D^{r-h} relativement à ces chaînes :

Lemme 7.6.- Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{SC}_r$ et f une application de classe D^s d'un ouvert Ω de E_0 dans F_0 . Pour tout entier h vérifiant $1 \leq h \leq s$ l'application

$$T_h f : \Omega \times E_h \rightarrow F_h \quad (x, X) \mapsto \delta_h^1 f(x) \cdot X$$

est de classe D^{s-h} relativement aux objets $\{E_k \times E_k^h\}_{k=0}^{r-h}$ et $\{F_k^h\}_{k=0}^{r-h}$ de $\underline{SC}_{r-h}$.

La condition d'appartenance à $\underline{SC}_r$ se traduit par le fait que les objets E_k^h (resp. F_k^h) de $\underline{V}$ associés à la chaîne $\{E_k^h\}_{k=0}^{r-h}$ (resp. $\{F_k^h\}_{k=0}^{r-h}$) s'identifient aux objets E_{k+h} (resp. F_{k+h}) associés à la chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ (resp. $\{F_k\}_{k=0}^r$).

L'espace $L^\alpha(E_k \times E_k^h; F_{k+h}^h) = L^\alpha(E_k \times E_{k+h}; F_{k+h+\alpha-1})$ est canoniquement isomorphe à une somme directe dont les premiers termes sont

$$L^\alpha(E_k; F_{k+h+\alpha-1}) \oplus L(E_{k+h}, E_k, \dots, E_k; F_{k+h+\alpha-1}) \oplus \dots \oplus L(E_k, \dots, E_k, E_{k+h}; F_{k+h+\alpha-1}) \oplus \dots$$

On définit donc une application continue et localement bornée $\delta_k^\alpha T_h f$ de $\Omega \times E_h$ dans $L^\alpha(E_k \times E_k^h; F_{k+h+\alpha-1}^h)$ par la somme directe des applications suivantes

1. L'application qui au point (x, X) de $\Omega \times E_h$ associe l'élément

$$\delta_{k+h-1}^{\alpha+1} f(x) \cdot [i_{k+h-1,h} X, i_{k+h-1,k}, \dots, i_{k+h-1,k}]$$

de $L^\alpha(E_k; F_{k+h+\alpha-1}^h)$, compte tenu de l'isomorphisme de $L^{\alpha+1}(E_{k+h-1}; F_{k+h+\alpha-1})$ avec $L(E_{k+h-1}; L^\alpha(E_{k+h-1}; F_{k+h+\alpha-1}))$.

2. L'application qui au point (x, X) de $\Omega \times E_h$ associe l'élément

$$\delta_{k+h}^\alpha f(x) \circ [i_{k+h,k}, \dots, 1_{E_{k+h}}, \dots, i_{k+h,k}]$$

de $L^\alpha(E_k, \dots, E_{k+h}, \dots, E_k; F_{k+h+\alpha-1})$ où E_{k+h} occupe la place de rang ℓ .

Il est clair que $\delta_k^\alpha T_k f(x, X)$ est un prolongement de $\delta_1^\alpha T_h f(x, X)$; il reste à vérifier que pour tout entier t vérifiant $0 \leq t \leq s-h$, l'application $j_{k+t, h} \circ T_h f$ de $\Omega \times E_h$ dans $F_t^h = F_{h+t}$ est de classe C^t et admet pour différentielles les applications continues

$$D_t^\alpha : \Omega \times E_h \xrightarrow{\delta_1^\alpha T_h f} L^\alpha(E_1 \times E_{h+1}; F_{h+\alpha}) \xrightarrow{L^\alpha(i_1 \times i_{h+1, h}; j_{h+t, h+\alpha})} L^\alpha(E_0 \times E_h; F_{h+t})$$

L'espace E_0 étant dense dans l'espace E_h il suffit pour cela que l'application $j_{h+t, h} \circ T_h f \circ (1_\Omega \times i_h)$ de $\Omega \times E_0$ dans F_{h+t} soit de classe C^t et admette pour différentielles les applications composées

$$\Omega \times E_0 \xrightarrow{1_\Omega \times i_h} \Omega \times E_h \xrightarrow{D_t^\alpha} L^\alpha(E_0 \times E_h; F_{h+t}) \xrightarrow{(1_{E_0} \times i_h)^*} L^\alpha(E_0 \times E_0; F_{h+t}) .$$

En explicitant il vient

$$j_{k+t, h} \circ T_h f(x, i_h X) = j_{h+t, h} \circ \delta_h^1 f(x) \circ i_h(X) = d[j_{h+t} \circ f](x) \cdot X = T[j_{h+t} \circ f](x, X) .$$

Comme $h+t$ est inférieur ou égal à s , l'application $j_{h+t} \circ f$ est de classe C^{h+t} et $T[j_{h+t} \circ f]$ est de classe C^{h+t-1} , donc de classe C^t puisque h est supérieur ou égal à 1 . Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned} (1_{E_0} \times i_h)^* \circ D_t^\alpha(x, i_h X) &= j_{h+t, h+\alpha} \circ \delta_h^{\alpha+1} f(x) \cdot [i_h X, i_h, \dots, i_h] + \alpha j_{h+t, h+\alpha} \circ \delta_{h+1}^\alpha f(x) \\ &= d^{\alpha+1}[j_{h+t} \circ f](x) \cdot X + \alpha d^\alpha[j_{h+t} \circ f](x) \circ [i_{h+1}, \dots, i_{h+1}] \end{aligned}$$

qui est bien la différentielle d'ordre α de $T[j_{h+t} \circ f]$.

La fin de la démonstration du théorème 7.5 est maintenant facile, les différentes applications étudiées s'exprimant en coordonnées locales par des applications linéaires ou bilinéaires dont la dérivabilité résulte des propriétés d'extension, conformément aux théorèmes 5.4 et 5.5 $\square$

Théorème 7.7.- Soient X et Y deux variétés de classe D^r et f une application de classe D^1 de X dans Y . Il existe une famille $\{T_h f\}_{h=1}^r$ de morphismes de fibrés $T_h f : T_h X \rightarrow T_h Y$ au-dessus de f , commutant avec les inclusions canoniques ; si g est une application de classe D^1 de Y dans une variété Z de classe D^r , on a $T_h(g \circ f) = T_h g \circ T_h f$; si $X = Y$ et si $f = 1_X$ on a $T_h 1_X = 1_{T_h X}$. Si X et Y sont modélées sur des objets de $\underline{SC}_r$ et si f est de classe D^s , pour tout h vérifiant $1 \leq h \leq s$ l'application $T_h f$ est de classe D^{s-h} .

Soient

$$A = \{U_\alpha, \phi_\alpha, \{E_{k;\alpha}\}_{k=0}^r\}_{\alpha \in A}$$

un atlas de classe D^r de X et

$$B = \{V_\beta, \psi_\beta, \{F_{k;\beta}\}_{k=0}^r\}_{\beta \in B}$$

un atlas de classe D^r de Y . Par hypothèse, l'application

$$f_{\beta,\alpha} = \psi_\beta \circ f \circ \phi_\alpha^{-1}$$

de $\phi_\alpha(U_\alpha)$ dans $F_{0;\beta}$ est de classe D^1 . On définit alors une application continue

$$T_{h;\beta,\alpha} f : \phi_\alpha(U_\alpha) \times E_{h;\alpha} \rightarrow \psi_\beta(V_\beta) \times F_{h;\beta} \quad (x, X) \rightsquigarrow (f_{\beta,\alpha}(x), \delta_h^1 f(x).X)$$

et la formule de différentiation d'une fonction composée montre que la famille d'applications $\{T_{h;\beta,\alpha} f\}_{\alpha \in A}$ définit un morphisme de $T_h X$ dans $T_h Y$ au-dessus de l'application f . Les propriétés de fonctorialité de T_h sont évidentes sur l'expression en coordonnées locales. Enfin si X et Y sont modélées sur des objets de $\underline{SC}_r$ et si f est de classe D^s , il résulte du lemme 7.6 que pour $h \leq s$ les applications $T_{h;\beta,\alpha} f$ sont de classe D^{s-h} , d'où la propriété de dérivabilité de l'application $T_h f$ $\square$

Définition 7.8.- Soient X une variété de classe D^r et A un sous-espace de X . Nous dirons que A est une sous-variété de la variété X si en tout point a de A il existe une carte locale $(U, \phi, \{E_k\}_{k=0}^r)$ de X et un facteur direct $\{E_k^A\}_{k=0}^r$ de $\{E_k\}_{k=0}^r$, au sens de la catégorie $\underline{C}_r$, tel que

- i- $\phi(a) = 0$
- ii- $\phi^{-1}(E_0^A) = A \cap U$.

Théorème 7.9.- Soient X une variété de classe D^r , A une sous-variété de X et i l'inclusion canonique de A dans X . Il existe une unique structure de variété de classe D^r sur A telle qu'une application f de but A soit de classe D^s si et seulement si l'application composée iof est de classe D^s ; l'application i est de classe D^r . Si, X est modelée sur des objets de $\underline{SC}_{=r}$ il en est de même pour A .

On choisit pour tout point a de A une carte $(U_a, \phi_a, \{E_{k;a}\}_{k=0}^r)$ de X au point a et un facteur direct $\{E_{k;a}^A\}_{k=0}^r$ de $\{E_{k;a}\}_{k=0}^r$ tels que

$$\phi_a(a) = 0 \quad \text{et} \quad \phi_a^{-1}(E_{0;a}^A) = U_a \cap A.$$

Soient $U_a^A = U_a \cap A$ et $\phi_a^A = \phi_a|_{(U_a \cap A)}$; la famille

$$A = \{U_a^A, \phi_a^A, \{E_{k;a}^A\}_{k=0}^r\}_{a \in A}$$

est alors un atlas de A . Ses propriétés vont résulter du

Lemme 7.10.- Soient $\{E'_k\}_{k=0}^r$ un facteur direct de $\{E_k\}_{k=0}^r$ et i le morphisme d'inclusion. Une application f de but $\{E'_k\}_{k=0}^r$ est de classe D^s si et seulement si l'application composée iof est de classe D^s .

La chaîne $\{E'_k\}_{k=0}^r$ étant un facteur direct, le morphisme d'inclusion admet un inverse à gauche s et, d'après le théorème 5.4, les application i et

s sont de classe D^r . Il résulte du théorème de composition des applications dérivables que si f est de classe D^s , alors iof est de classe D^s et que, réciproquement, si iof est de classe D^s , alors $f = \text{so}(\text{iof})$ est de classe D^s .

Montrons que l'atlas A est de classe D^r . Soient $\phi_{b,a}^A = \phi_b^A \circ (\phi_a^A)^{-1}$ un changement de cartes de l'atlas A , $\phi_{b,a}$ l'application $\phi_b^A \circ \phi_a^{-1}$ qui est de classe D^r puisque c'est un changement de cartes de la variété X de classe D^r et i_a le morphisme d'inclusion de $\{E_{k;a}^A\}_{k=0}^r$ dans $\{E_{k;a}\}_{k=0}^r$; d'après le lemme 7.10, l'application $\phi_{b,a}^A$ est de classe D^r car $i_b \circ \phi_{b,a}^A = \phi_{b,a} \circ i_a$ est de classe D^r . L'espace A muni de la classe d'équivalence de l'atlas A est donc une variété de classe D^r et l'application d'inclusion i qui s'exprime en coordonnées locales par les morphismes i_a est de classe D^r . La caractérisation des applications de but A résulte directement du lemme 7.10 appliqué en coordonnées locales. L'unicité de la structure de variété de classe D^r sur A est conséquence de cette caractérisation. Enfin, si X est modelée sur des objets de $\underline{\underline{SC}}_r$, cette propriété se conserve pour A d'après le lemme suivant :

Lemme 7.11.- Soit $\{E'_k\}_{k=0}^r$ un facteur direct de $\{E_k\}_{k=0}^r$. Si $\{E_k\}_{k=0}^r$ est un objet de $\underline{\underline{SC}}_r$, il en est de même de $\{E'_k\}_{k=0}^r$.

Notons i le morphisme d'inclusion de $\{E'_k\}_{k=0}^r$ dans $\{E_k\}_{k=0}^r$ et s un inverse à gauche de i . Soient k et ℓ deux indices tels que $\ell < k$; on pose $E'_k = (E'_k, \overline{B'_\ell})$ (resp. $E_k = (E_k, \overline{B_\ell})$) l'objet de $\underline{V}$ tel que $\overline{B'_\ell}$ (resp. $\overline{B_\ell}$) soit la fermeture dans $P(E'_k)$ (resp. $P(E_k)$) de la famille des parties bornées de E'_ℓ (resp. E_ℓ); comme par hypothèse la chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$ appartient à $\underline{\underline{SC}}_r$, la famille $\overline{B_\ell}$ ne dépend pas de ℓ et nous voulons montrer qu'il en va de même pour la famille $\overline{B'_\ell}$. Le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 E'_\ell & \xrightarrow{i_\ell} & E_\ell & \xrightarrow{s_\ell} & E'_\ell \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 E'_k & \xrightarrow{i_k} & E_k & \xrightarrow{s_k} & E'_k
 \end{array}$$

et le lemme 4.4 entraînent que i_k et s_k définissent des morphismes entre E'_ℓ et E_k et que donc E'_k est dans $\underline{V}$ un facteur direct de E_k . La structure de E'_k étant la structure initiale pour i_k , la famille $\overline{B}'_\ell$ est l'image réciproque par i_k de la famille $\overline{B}_\ell$ qui est indépendante de ℓ , d'où il résulte que $\overline{B}'_\ell$ ne dépend pas de ℓ et que $\{E'_k\}_{k=0}^r$ appartient donc à $\underline{SC}_{=r}$ $\square$

CHAPITRE 11

§ 0 - APPLICATIONS PARTIELLEMENT DIFFÉRENTIABLES.

Soit Ω un ouvert d'un produit $E_1 \times E_2$ d'espaces de Banach et f une application de Ω dans un espace de Banach F . Le théorème de Schwarz sous sa forme traditionnelle exprime que si f admet des différentielles partielles $d_1 d_2 f$ et $d_2 d_1 f$ continues au voisinage d'un point (a_1, a_2) on a $d_1 d_2 f = d_2 d_1 f$ au voisinage de ce point, si l'on identifie les espaces $L(E_1; L(E_2; F))$ et $L(E_2; L(E_1; F))$. Nous utiliserons ce théorème sous la forme plus forte suivante :

Théorème 0.1.- Si f admet des différentielles partielles $d_1 f$, $d_2 f$ et $d_1 d_2 f$ continues au voisinage d'un point (a_1, a_2) , la différentielle partielle $d_2 d_1 f$ existe et coïncide avec $d_1 d_2 f$ au voisinage de ce point.

Fixons $y_1 \in E_1$ et $y_2 \in E_2$ et considérons la suite de fonctions

$$f_n(t) = n[f(a_1 + \frac{1}{n}y_1, a_2 + ty_2) - f(a_1, a_2 + ty_2)]$$

définies et continûment dérivables sur l'intervalle $[0, 1]$. La suite $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers

$$f(t) = d_1 f(a_1, a_2 + ty_2) \cdot y_1 \quad ;$$

cette application est dérivable si la suite des dérivées $\frac{d}{dt} f_n$ converge uniformément. Nous avons

$$\frac{d}{dt} f_n(t) = n[d_2 f(a_1 + \frac{1}{n}y_1, a_2 + ty_2) - d_2 f(a_1, a_2 + ty_2)] \cdot y_2$$

qui converge simplement vers

$$g(t) = d_1 d_2 f(a_1, a_2 + ty_2) \cdot (y_2, y_1)$$

et, pour toute valeur de t , nous avons

$$\frac{d}{dt}f_n(t) - g(t) = \int_0^1 [d_1 d_2 f(a_1 + \frac{s}{n} y_1, a_2 + t y_2) - d_1 d_2 f(a_1, a_2 + t y_2)] \cdot (y_2, y_1) ds ;$$

l'application $d_1 d_2 f(a_1 + s y_1, a_2 + t y_2)$ est continue, donc uniformément continue en s et t : ε étant donné, il existe η tel que $|s - s'| < \eta$ et $|t - t'| < \eta$ entraînent que

$$||d_1 d_2 f(a_1 + s y_1, a_2 + t y_2) - d_1 d_2 f(a_1 + s' y_1, a_2 + t' y_2)|| < \varepsilon ;$$

si l'on prend $n > \frac{1}{\eta}$, on aura, quels que soient s et t dans l'intervalle $[0, 1]$

$$||d_1 d_2 f(a_1 + \frac{s}{n} y_1, a_2 + t y_2) - d_1 d_2 f(a_1, a_2 + t y_2)|| < \varepsilon$$

d'où

$$||\frac{d}{dt}f_n(t) - g(t)|| < \varepsilon ||y_1|| ||y_2||$$

ce qui exprime la convergence uniforme.

Nous avons donc montré que la fonction $d_1 f(a_1, a_2 + t y_2) \cdot y_1$ est dérivable en t et que sa dérivée est la fonction $d_1 d_2 f(a_1, a_2 + t y_2) \cdot (y_2, y_1)$. Soit maintenant

$$\partial d_1 f : \Omega \rightarrow L(E_2; L(E_1; F))$$

l'application continue déduite de $d_1 d_2 f$ par l'isomorphisme canonique de $L(E_1; L(E_2; F))$ sur $L(E_2; L(E_1; F))$. Pour tout y_1 nous avons

$$d_1 f(a_1, a_2 + y_2) \cdot y_1 - d_1 f(a_1, a_2) \cdot y_2 - d_1 d_2 f(a_1, a_2) \cdot (y_2, y_1) = \int_0^1 [d_1 d_2 f(a_1, a_2 + t y_2) - d_1 d_2 f(a_1, a_2)] \cdot (y_2, y_1) dt$$

ce qui, dans l'espace $L(E_1; F)$, s'exprime par

$$d_1 f(a_1, a_2 + y_2) - d_1 f(a_1, a_2) - \partial d_1 f(a_1, a_2) \cdot y_2 = \int_0^1 [\partial d_1 f(a_1, a_2 + t y_2) - \partial d_1 f(a_1, a_2)] \cdot y_2 dt .$$

L'application $\partial d_1 f$ étant continue, ε étant donné, il existe η tel que $||y_2|| < \eta$ entraîne que, quel que soit $t \in [0, 1]$, on ait

$$||\partial d_1 f(a_1, a_2 + ty_2) - \partial d_1 f(a_1, a_2)|| < \varepsilon$$

d'où

$$||d_1 f(a_1, a_2 + y_2) - d_1 f(a_1, a_2) - \partial d_1 f(a_1, a_2) \cdot y_2|| < \varepsilon ||y_2||$$

ce qui achève la démonstration $\square$

Nous noterons D l'ensemble des parties P de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant la propriété : si (α, β) appartient à P , si $\alpha' \leq \alpha$ et $\beta' \leq \beta$, alors (α', β') appartient à P .

Définition 0.2.- Soit P un élément de D . Nous dirons qu'une application f définie sur un ouvert Ω d'un produit $E_1 \times E_2$ d'espaces de Banach, à valeurs dans un espace de Banach F , est P-fois partiellement continûment différentiable si pour tout (α, β) élément de P la différentielle partielle $d_1^\alpha d_2^\beta f$ existe et est continue dans Ω .

La forme de P et le théorème 0.1 (théorème de Schwarz) entraînent que si f est P-fois partiellement continûment différentiable ; les différentielles partielles $d_1^{\alpha_1} d_2^{\beta_1} d_1^{\alpha_2} d_2^{\beta_2} \dots d_1^{\alpha_k} d_2^{\beta_k} f$ existent et sont continues dès que $(\alpha, \beta) = (\sum_i \alpha_i, \sum_i \beta_i)$ appartient à P . En particulier les différentielles $d_2^\beta d_1^\alpha f$ existent et sont continues pour tout (α, β) élément de P ; considérée comme application de $E_2 \times E_1$ dans F , l'application f est donc ${}^tP$ -fois partiellement continûment différentiable, où ${}^tP$ est l'ensemble des couples (α, β) tels que (β, α) appartienne à P .

La notion d'application P-fois partiellement continûment différentiable s'étend de manière naturelle aux applications définies sur un produit $V_1 \times V_2$ de variétés, à valeurs dans une variété W . Si V_1 est de classe

C^{r_1} et W de classe C^S , il faut bien sûr se restreindre aux éléments P de D contenus dans le domaine

$$\{(\alpha, \beta) \mid \alpha \leq r_1, \beta \leq r_2, \alpha + \beta \leq s\}$$

de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Nous allons encore étendre cette notion au cas de certaines fibrations.

Soient $E = (E, p, B, F)$ et $E' = (E', p', B', F')$ deux espaces fibrés vectoriels de classe C^r , Ω un ouvert de E et f une application de Ω dans E' , respectant les fibrations. En coordonnées locales, une telle application a la forme

$$U_i \times F \supset \Omega_i \xrightarrow{f_{k,i}} U'_k \times F' \quad (x, y) \mapsto (f_{k,i}^1(x), f_{k,i}^2(x, y)) .$$

Si $a_{j,i}$ et $a'_{k,l}$ sont les fonctions de transition des fibrés E et E' relativement aux atlas choisis, on a entre les représentants locaux $f_{k,i}$ et $f_{l,j}$ de f les relations

$$\begin{aligned} f_{k,i}^1(x) &= f_{l,j}^1(x) \\ f_{k,i}^2(x, y) &= a'_{k,l}(f_{l,j}^1(x)) \cdot f_{l,j}^2(x, a_{j,i}(x) \cdot y) \end{aligned}$$

Une condition suffisante pour que $d_1^{\alpha} d_2^{\beta} f_{k,i}^2$ existe et soit continue est donc que l'on ait $\alpha \leq r$, $f_{l,j}^1$ de classe C^{α} et que les différentielles partielles $d_1^{\alpha-\gamma} d_2^{\beta+\gamma} f_{l,j}^2$ existent et soient continues pour $0 \leq \gamma \leq \alpha$.

Nous noterons D_{ϕ}^r le sous-ensemble de D formé des parties P de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vérifiant la propriété : si (α, β) est un élément de P on a $\alpha \leq r$ et si $\alpha' \leq \alpha$ et $\alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta$ on a (α', β') élément de P .

L'étude précédente montre que si un représentant local de f est P -fois partiellement continûment différentiable et si P appartient à D_{ϕ}^r , tout autre représentant local de f est, sur le domaine commun de définition, P -fois partiellement continûment différentiable. Ce résultat assure la cohérence de la définition suivante :

Définition 0.3. - Soient E et E' deux espaces fibrés vectoriels de classe C^r , Ω un ouvert de l'espace total de E , f une application de Ω dans l'espace total de E' , respectant les fibrations et soit P un élément de D_ϕ^r . Nous dirons que l'application f est P -fois partiellement continûment différentiable s'il existe en tout point de Ω un représentant local f qui soit P -fois partiellement continûment différentiable.

Remarque 0.4. - Si l'espace fibré E est trivial, les relations entre les représentants locaux de f s'écrivent

$$\begin{aligned} f_k^1(x) &= f_\ell^1(x) \\ f_k^2(x,y) &= a'_{k,\ell}(f_\ell^1(x)) \cdot f_\ell^2(x,y) . \end{aligned}$$

Pour que $d_1^\alpha d_2^\beta f_k^2$ existe et soit continue, il suffit alors que l'on ait $\alpha \leq r$, f_ℓ^1 de classe C^α et que $d_1^\alpha d_2^\beta f_\ell^2$ existe et soit continue. La notion d'application P -fois partiellement continûment différentiable est donc définie dans ce cas pour toutes les parties P appartenant à D et telles que si (α, β) appartient à P on ait $\alpha \leq r$. Nous noterons D^r la famille de ces parties.

Considérons maintenant deux espaces fibrés vectoriels $E = (E, p, B, F)$ et $E' = (E', p', B, F')$ de classe C^r de même base B ; nous noterons $L^k(E; E')$ l'espace fibré vectoriel de classe C^r , de base B , de fibre $L^k(F, F')$ associé au fibré somme de Whitney $E \oplus E'$; si l'espace fibré E est trivial, nous noterons $L^k(F, E')$ l'espace fibré $L^k(E; E')$. Soient maintenant un ouvert Ω de E et une application fibrée f de Ω dans E' , P -fois partiellement continûment différentiable, induisant l'identité sur la base B . Relativement à des atlas A et A' de E et de E' correspondant à un même recouvrement de la base, l'application f s'écrit

$$U_i \times F \supset \Omega_i \rightarrow U_i \times F' \quad (x, y) \rightsquigarrow (x, f_i(x, y))$$

et par changement de cartes on a

$$f_j(x,y) = a_{j,i}^!(x) \cdot f_i(x, a_{i,j}(x).y)$$

d'où il résulte que

$$d_2^k f_j(x,y) = a_{j,i}^!(x) \cdot d_2^k f_i(x, a_{i,j}(x).y) \cdot [a_{i,j}(x)]^k$$

c'est-à-dire que les applications locales

$$U_i \times F \supset \Omega_i \rightarrow U_i \times L^k(F; F') \quad (x,y) \mapsto (x, d_2^k f_i(x,y))$$

définissent une application fibrée $d_\phi^k f$ de Ω dans l'espace total de l'espace fibré vectoriel $L^k(E; E')$. Si l'on note $d_\phi^k P$ la partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par " (α, β) appartient à $d_\phi^k P$ si et seulement si $(\alpha, \beta+k)$ appartient à P ", il est clair que l'application $d_\phi^k f$ est $d_\phi^k P$ -fois partiellement continûment différentiable. De plus, en tenant compte de l'isomorphisme canonique des espaces fibrés $L^h(E; L^k(E; E'))$ et $L^{k+h}(E; E')$, on a

$$d_\phi^h [d_\phi^k f] = d_\phi^{k+h} f.$$

Si l'on compose f avec une application f' d'un ouvert de E' dans l'espace total d'un espace fibré vectoriel $E'' = (E'', p'', B, F'')$, fibrée au dessus de l'identité de B , l'application $f' \circ f$ s'exprimant en coordonnées locales par

$$(f' \circ f)_i(x,y) = f'_i(x, f_i(x,y))$$

on a

$$d_2^k (f' \circ f)_i(x,y) = \sum_{h=1}^k \frac{1}{h!} d_2^h f'_i(x, f_i(x,y)) \cdot \left[\sum_{k_1 + \dots + k_h = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_h!} d_2^{k_1} f_i(x,y) \dots d_2^{k_h} f_i(x,y) \right]$$

En usant de la somme des applications fibrées et des morphismes de composition

$$L^{k_1}(E; E') \oplus \dots \oplus L^{k_h}(E; E') \oplus L^h(E'; E'') \rightarrow L^k(E; E'')$$

on peut donc écrire

$$d_{\phi}^k(f \circ f) = \sum_{h=1}^k \frac{1}{h!} d_{\phi}^h f \circ f \cdot \left[\sum_{k_1 + \dots + k_h = k} \frac{k!}{k_1! \dots k_h!} d_{\phi}^{k_1} f \times \dots \times d_{\phi}^{k_h} f \right],$$

formule généralisant la formule classique de différentiation d'une fonction composée.

§ 1 - LA GEOMETRIE DERIVABLE DES ESPACES DE SECTIONS DIFFERENTIABLES D'UN ESPACE FIBRE VECTORIEL.

Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. On définit classiquement une structure d'espace de Banach sur l'espace $C^k(E)$ des sections de classe C^k de E ; l'inclusion canonique de $C^{k+1}(E)$ dans $C^k(E)$ est alors une application linéaire continue, injective et d'image dense. Nous noterons $C_*^r(E)$ la chaîne d'espaces de Banach $\{C^k(E)\}_{k=0}^r$; cette chaîne est un objet de $\underline{\underline{C}}^r$ pour lequel on peut développer une géométrie dérivable.

Tenant compte de la nature particulière des chaînes étudiées, nous allons donner (théorème 1.6) une interprétation spécifique des familles de parties bornées associées à une chaîne $C_*^r(E)$, c'est-à-dire de la fermeture dans $P(C^{r-u}(E))$ de l'image de la famille des parties bornées de $C^r(E)$, d'où il résultera que $C_*^r(E)$ est un objet de la sous-catégorie $\underline{\underline{SC}}^r$, et (théorème 1.9) une caractérisation des applications de classe D^S de source un espace de Banach et de but une chaîne $C_*^r(E)$. Cette étude usant des techniques mêmes de la construction de la structure d'espace de Banach sur $C^k(E)$ nous allons rappeler ici cette construction afin d'en fixer les notations.

Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte B , de projection p . On choisit un système

$$A = \{U_i, V_i, \phi_i, E_i, \psi_i, F_i\}_{i=1}^n$$

tel que $\{(V_i, \phi_i, E_i)\}_{i=1}^n$ soit un atlas de la base B , $\{(p^{-1}(V_i), \psi_i, \phi_i(V_i) \times F_i)\}_{i=1}^n$ soit un atlas du fibré E et $\{U_i\}_{i=1}^n$ soit un raffinement du recouvrement $\{V_i\}_{i=1}^n$ tel que $\bar{U}_i$ soit compact et contenu dans V_i ; on note K_i le compact image de $\bar{U}_i$ par ϕ_i . Une section s de E s'exprime en coordonnées locales par

$$(\psi_i \circ s \circ \phi_i^{-1}|_{K_i}) : K_i \rightarrow K_i \times F_i \quad x \rightsquigarrow (x, s_i(x)) ;$$

nous noterons ρ_i^k l'application linéaire de $C^k(E)$ dans $C^k(K_i, F_i)$ qui associe s_i à s et ρ^k l'application linéaire de $C^k(E)$ dans $\prod_i C^k(K_i, F_i)$ produit des applications ρ_i^k . Soit maintenant $\{f_i\}_{i=1}^n$ une partition de l'unité sur B , subordonnée au recouvrement $\{U_i\}_{i=1}^n$. A toute application s_i élément de $C^k(K_i, F_i)$ on associe la section $\bar{s}_i$ de E définie par

$$\bar{s}_i = f_i \times [\psi_i^{-1} \circ (1_{K_i} \times s_i) \circ \phi_i|_{U_i}]$$

qui est un élément de $C^k(E)$; nous noterons σ^k l'application linéaire de $\prod_{i=1}^n C^k(K_i, F_i)$ dans $C^k(E)$ qui associe à $(s_1, \dots, s_n)$ la section $\sum_{i=1}^n \bar{s}_i$. Il est immédiat que l'on a $\sigma^k \circ \rho^k = 1_{C^k(E)}$. Si l'on munit les espaces $C^k(K_i, F_i)$ de la topologie de la convergence uniforme pour la fonction et ses k premières différentielles, le produit fini $\prod_{i=1}^n C^k(K_i, F_i)$ est un espace de Banach et $C^k(E)$ s'identifie à un facteur direct de cet espace (on vérifie que $\rho^k \circ \sigma^k$ est une application continue), d'où une structure d'espace de Banach sur $C^k(E)$.

La topologie sur les espaces $C^k(K_i, F_i)$ n'est autre que la topologie initiale pour l'application

$$j : C^k(K_i, F_i) \rightarrow C^0(K_i, \prod_{\alpha=0}^k L^\alpha(E_i; F_i))$$

telle que $[j(s_i)](x)$ soit le jet d'ordre k de s_i au point x , l'espace $C^0(K_i, \prod_{\alpha=0}^k L^\alpha(E_i; F_i))$ étant muni de la topologie de la convergence uniforme. Il en résulte que si nous notons $j^k E$ l'espace fibré vectoriel des jets d'ordre k de E , la topologie définie sur $C^k(E)$ est la topologie initiale pour l'application "jet d'ordre k " :

$$j : C^k(E) \rightarrow C^0(j^k E) .$$

Enfin, la topologie définie sur $C^k(E)$ ne dépend pas des choix faits ; cela résulte de la proposition suivante :



Proposition 1.1.- Soient E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte et T un espace topologique. Une application f de T dans $C^k(E)$ est continue si et seulement si l'application

$$\tilde{f} : B \times T \rightarrow E \quad (x,t) \rightsquigarrow [f(t)](x)$$

est k fois partiellement continûment différentiable en la première variable.

La topologie de $C^k(E)$ étant la topologie initiale pour l'injection ρ^k , la continuité de f est équivalente à la continuité de l'application composée $\rho^k \circ f = \prod_{i=1}^n \rho_i^k \circ f$, donc à la continuité de chacune des applications $f_i = \rho_i^k \circ f$ de T dans $C^k(K_i, F_i)$. Par ailleurs, les ouverts U_i formant un recouvrement de B , l'application $\tilde{f}$ est k fois partiellement continûment différentiable si et seulement si chacune des applications $\tilde{f}_i$ de $K_i \times T$ dans F_i est k fois partiellement continûment différentiable. Enfin la topologie de $C^k(K_i, F_i)$ étant la topologie initiale pour l'application

$$j : C^k(K_i, F_i) \rightarrow C^0(K_i; \prod_{\alpha=0}^k L^\alpha(E_i; F_i)) \quad s_i \rightsquigarrow (s_i \times ds_i \times \dots \times d^k s_i)$$

l'application f_i est continue si et seulement si l'application composée $j \circ f_i$ est continue, c'est-à-dire, d'après les propriétés de la topologie de la convergence uniforme sur un compact, si et seulement si l'application

$$\overline{j \circ f_i} : K_i \times T \rightarrow \prod_{\alpha=0}^k L^\alpha(E_i; F_i) \quad (x,t) \rightsquigarrow (\tilde{f}_i(x,t), d_1 \tilde{f}_i(x,t), \dots, d_1^k \tilde{f}_i(x,t))$$

est continue, c'est-à-dire encore si $\tilde{f}_i$ est k fois partiellement continûment différentiable en la première variable $\square$

Soient E un espace fibré vectoriel et M une famille de sections de E . Etant donné une carte locale

$$\psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$$

de E , on associe à toute section s de E l'application composée

$$s_U : U \xrightarrow{s|_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{\psi} U \times F \xrightarrow{\pi_2} F$$

et à la famille M de sections la famille $M_U = \{s_U | s \in M\}$ d'applications de U dans F . Supposons que la famille M_U soit équicontinue et bornée en un point x_0 de U et soit

$$\psi' = p^{-1}(U') \rightarrow U' \times F'$$

une autre carte de E au point x_0 ; la famille $M_{U'}$ est alors équicontinue et bornée au point x . En effet, si

$$a : U \cap U' \rightarrow L(F; F')$$

est la fonction de transition entre les cartes ψ et ψ' on a

$$s_{U'}(x) = a(x) \cdot s_U(x)$$

d'où il résulte que la partie $\{s_{U'}(x_0) | s \in M\}$ de F' , image par l'application linéaire continue $a(x_0)$ de la partie bornée $\{s_U(x_0) | s \in M\}$ est bornée et que l'on a

$$s_{U'}(x) - s_{U'}(x_0) = [a(x) - a(x_0)] \cdot s_U(x) + a(x_0) \cdot [s_U(x) - s_U(x_0)]$$

ce qui entraîne que $M_{U'}$ est équicontinue au point x_0 puisque a est continue, que M_U est équicontinue au point x_0 et que M_U , équicontinue et bornée au point x_0 , est bornée au voisinage de x_0 .

Définition 1.2. - Soit E un espace fibré vectoriel. Nous dirons qu'une famille M de sections de E est 0-équicontinue si pour tout point x de la base il existe une carte locale $\psi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ de E au point x telle que M_U soit équicontinue et bornée au point x .

Définition 1.3. - Soit E un espace fibré vectoriel différentiable.

Nous dirons qu'une famille M de sections de E est k -équicontinue si ces sections sont de classe C^k et si l'image de M par j dans $C^0(J^k E)$ est une famille 0-équicontinue.

La propriété de k -équicontinuité peut encore s'exprimer de la manière suivante : un coordonnées locale la famille d'applications M_U ainsi que les familles des différentielles jusqu'à l'ordre k sont équicontinues et localement bornées.

Proposition 1.4. - Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. La famille $\mathcal{E}$ des parties k -équicontinues de $C^k(E)$ est une famille fermée et saturée de parties bornées, contenant les parties finies. Nous noterons $C^k(E)$ l'objet $(C^k(E), \mathcal{E}^k)$ de la catégorie $\underline{V}$.

La topologie de $C^k(E)$ étant la topologie initiale pour j et la famille $\mathcal{E}^k$ étant l'image réciproque par j de la famille des parties 0-équicontinues de $C^0(J^k E)$, il suffit d'après la proposition 1.2.4. de démontrer la proposition pour $k = 0$.

Soit ρ le prolongement de $C^0(E)$ dans $\prod_{i=1}^n C^0(K_i, F_i)$ associé à un système $A = \{(U_i, V_i, \phi_i, E_i, \psi_i, F_i)\}_{i=1}^n$, avec $K_i = \overline{U_i}$. Une partie M de $C^0(E)$ est 0-équicontinue si et seulement si, pour tout indice i , $\rho_i(M)$ est une partie équicontinue et ponctuellement bornée de $C^0(K_i, F_i)$. Le domaine K_i étant compact, les parties équicontinues et ponctuellement bornées sont les parties équicontinues et bornées et la famille $\mathcal{E}_i$ de ces parties est fermée d'après le corollaire 1.1.8 ; il est clair par ailleurs que cette famille est saturée et contient les parties finies. Le couple $\mathcal{C}^0(K_i, F_i) = (C^0(K_i, F_i), \mathcal{E}_i)$ est donc un objet de $\underline{V}$ et le couple $\mathcal{C}^0(E) = (C^0(E), \mathcal{E}^0)$ qui est structure initiale pour l'application

$$\rho : C^0(E) \rightarrow \prod_{i=1}^n C^0(K_i, F_i)$$

soit égale à 1, l'intégrale de $|\theta_i^\lambda|$ soit bornée indépendamment de λ par un nombre A_i et que le support de θ_i^λ soit contenu dans la boule de rayon $\lambda \epsilon_i$. On considère alors les applications linéaires continues α_i^λ de $C^h(K_i, F_i)$ dans $C^k(K'_i, F_i)$ qui associent à une application s_i son produit de convolution avec θ_i^λ , puis l'application linéaire continue

$$\alpha^\lambda : C^h(E) \xrightarrow{\rho^h} \prod_{i=1}^n C^h(K_i, F_i) \xrightarrow{\prod \alpha_i^\lambda} \prod_{i=1}^n C^k(K'_i, F_i) \xrightarrow{\sigma'^k} C^k(E) .$$

Remarquons d'abord que l'application $\iota \alpha^\lambda$ appartient à $L(C^h(E); C^h(E))$. En effet, le théorème des accroissements finis entraîne que ι transforme toute partie bornée de $C^k(E)$ en une partie h -équicontinue dès que k est strictement supérieur à h . Nous devons maintenant montrer que $\iota_{C^h(E)}^{-1} \iota \alpha^\lambda$ converge vers zéro dans $L(C^h(E); C^h(E))$, c'est-à-dire encore que $s^{-1} \iota \alpha^\lambda(s)$ converge vers zéro dans $C^h(E)$ uniformément par rapport à s lorsque s parcourt une partie h -équicontinue M . Or nous avons

$$\begin{aligned} \iota_{C^h(E)}^{-1} \iota \alpha^\lambda &= \sigma'^h \circ \prod_{i=1}^n \rho_i' \circ \rho^h - \sigma'^h \circ \prod_{i=1}^n \iota_i' \circ \prod_{i=1}^n \alpha_i^\lambda \circ \rho^h \\ &= \sigma'^h \circ \prod_{i=1}^n (\rho_i' - \iota_i' \circ \alpha_i^\lambda) \circ \rho^h \end{aligned}$$

d'où il résulte que l'étude de $s^{-1} \iota \alpha^\lambda(s)$ se ramène à l'étude pour chaque indice i de l'application $\rho_i'(s_i) - \iota_i' \circ \alpha_i^\lambda(s_i)$, avec $s_i = \rho_i^h(s)$, c'est-à-dire l'application S_i^λ définie par

$$S_i^\lambda(x) = s_i(x) - \int_{\mathbb{R}^{v_i}} \theta_i^\lambda(y) s_i(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^{v_i}} \theta_i^\lambda(y) [s_i(x) - s_i(x-y)] dy .$$

Pour tout ℓ vérifiant $0 \leq \ell \leq h$ et tout point x de K'_i on a

$$d^\ell S_i(x) = \int_{\mathbb{R}^{v_i}} \theta_i^\lambda(y) [d^\ell s_i(x) - d^\ell s_i(x-y)] dy .$$

L'application $d^\ell s_i$ étant continue sur le compact K_i est uniformément continue et pour tout ϵ positif il existe donc un nombre positif $\eta_i^\ell(\epsilon)$ tel que $\|x-x'\| < \eta_i^\ell(\epsilon)$ entraîne $\|d^\ell s_i(x) - d^\ell s_i(x')\| < \epsilon$; nous aurons donc

$$\sup_{x \in K_i^!} ||d^{\ell} S_i^{\lambda}(x)|| < \varepsilon A_i$$

dès que $\lambda \varepsilon_i$ est inférieur à $\eta_i^{\ell}(\varepsilon)$, d'où

$$||S_i^{\lambda}||_h = ||\rho_i^!(s_i)^{-1} \circ \alpha_i^{\lambda}(s_i)||_h < \varepsilon A_i$$

dès que $\lambda \varepsilon_i$ est inférieur à $\eta_i^{\ell}(\varepsilon) = \inf \eta_i^{\ell}(\varepsilon)$. Lorsque s parcourt une partie h -équicontinue M , les familles $d^{\ell} M_i = \{d^{\ell} \rho_i^h(s) | s \in M\}$ sont équicontinues et il est alors possible de choisir les modules de continuité uniforme $\eta_i^{\ell}(\varepsilon)$ communs à tous les éléments de $M_i = \rho_i^h(M)$, ce qui entraîne que S_i^{λ} converge vers zéro uniformément par rapport à s_i lorsque s_i parcourt M_i , donc que $s^{-1} \circ \alpha^{\lambda}(s) = \sigma^h(\prod_{i=1}^n S_i^{\lambda})$ converge vers zéro, uniformément par rapport à s lorsque s parcourt M $\square$

Théorème 1.6.- Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. Si k est strictement supérieur à h , la famille $\mathcal{C}^h$ des parties h -équicontinues de $C^h(E)$ est la fermeture dans $P(C^h(E))$ de l'image par l'injection canonique ι de $C^k(E)$ dans $C^h(E)$ de la famille $\mathcal{B}^k$ des parties bornées de $C^k(E)$.

Le théorème des accroissements finis montre qu'une famille de sections de classe C^k bornée dans $C^k(E)$ est h -équicontinue pour tout h strictement inférieur à k , c'est-à-dire que $\iota \mathcal{B}^k$ est contenu dans $\mathcal{C}^h$; cette dernière famille étant fermée, la fermeture de $\iota \mathcal{B}^k$ est contenue dans $\mathcal{C}^h$.

Pour démontrer la réciproque, nous choisissons une famille d'approximations

$$\alpha^{\lambda} : C^h(E) \rightarrow C^k(E)$$

vérifiant les propriétés énoncées au lemme 1.5. Soit M une partie h -équicontinue de $C^h(E)$; quel que soit le voisinage V de l'origine dans $C^h(E)$ il existe λ tel que $s^{-1} \circ \alpha^{\lambda}(s)$ appartienne à V quel que soit s élément de M ; on a donc

$$M \subset \iota \circ \alpha^{\lambda}(M) + V$$

où $\alpha^\lambda(M)$ est borné dans $C^k(E)$, ce qui démontre que M adhère à ${}_1B^k$ donc que e^h est contenu dans l'adhérence de ${}_1B^k$ $\square$

Corollaire 1.7.- La chaîne $C_*^r(E) = \{C^k(E)\}_{k=0}^r$ est un objet de $\underline{\underline{SC}}^r$.

Si k_1 et k_2 sont strictement supérieurs à h on a en effet

$$\overline{{}_1B^{k_1}} = e^h \quad \text{et} \quad \overline{{}_2B^{k_2}} = e^h$$

d'où il résulte que

$$\overline{{}_1B^{k_1}} = \overline{{}_2B^{k_2}}$$

où ${}_1$ est l'inclusion de $C^{k_1}(E)$ dans $C^h(E)$ et ${}_2$ l'inclusion de $C^{k_2}(E)$ dans $C^h(E)$ $\square$

Théorème 1.8.- Soient E un espace de Banach et E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. L'espace de Banach $C^k(L^\alpha(E;E))$ est canoniquement isomorphe à l'espace $L^\alpha(E;C^k(E))$ des applications α -linéaires continues transformant une partie bornée en une partie k -équicontinue.

Soit

$$ev : L^\alpha(E;E) \times E^\alpha \rightarrow E$$

le morphisme multilinéaire d'espaces fibrés vectoriels différentiables dont la restriction à une fibre est l'application d'évaluation. Si s est une section de classe C^k de $L^\alpha(E;E)$, l'application composée

$$B \times E^\alpha \xrightarrow{s \times 1_E^\alpha} L^\alpha(E;E) \times E^\alpha \xrightarrow{ev} E$$

est fibrée au-dessus de l'identité de B et k -fois partiellement continûment différentiable en la première variable ; il lui correspond d'après la proposition 1.1 une application continue $\phi(s)$ de E^α dans $C^k(E)$ dont il est facile de vérifier qu'elle est α -linéaire. On définit ainsi une application linéaire

injective

$$\Phi : C^k(L^\alpha(E;E)) \rightarrow L^\alpha(E;C^k(E))$$

dont nous allons étudier la continuité et l'image. Pour ce faire on choisit un système

$$A = \{(U_i, V_i, \phi_i, E_i, \psi_i, F_i)\}_{i=1}^n$$

pour le fibré E et le système associé

$$^*A = \{(U_i, V_i, \phi_i, E_i, ^*\psi_i, L^\alpha(E;F_i))\}_{i=1}^n$$

pour le fibré $L^\alpha(E;E)$; on note ϕ_i l'application linéaire de $C^k(K_i, L^\alpha(E;F_i))$ dans $L^\alpha(E;C^k(K_i, F_i))$ construite comme Φ . On a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C^k(L^\alpha(E;E)) & \xrightarrow{\rho^k} & \prod_{i=1}^n C^k(K_i, L^\alpha(E;F_i)) \\ \downarrow \Phi & & \downarrow \prod_{i=1}^n \phi_i \\ L^\alpha(E;C^k(E)) & \xrightarrow{L^\alpha(E;\rho^k)} & \prod_{i=1}^n L^\alpha(E;C^k(K_i, F_i)) \end{array} .$$

L'application $L^\alpha(E;\rho^k)$ identifiant $L^\alpha(E;C^k(E))$ à un facteur direct de $\prod_{i=1}^n L^\alpha(E;C^k(K_i, F_i))$, la continuité de Φ résulte de celle des applications ϕ_i .

En tenant compte de l'isomorphisme canonique entre $L^\beta(E_i; L^\alpha(E;F_i))$ et

$L^\alpha(E; L^\beta(E_i; F_i))$, on a

$$d^\beta[\phi_i(s_i) \cdot (X_1, \dots, X_\alpha)](x) = d^\beta s_i(x) \cdot (X_1, \dots, X_\alpha)$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\phi_i(s_i)\|_{L^\alpha(E;C^k(K_i, F_i))} &= \sup_{\|X\|=1} \|\phi_i(s_i) \cdot (X_1, \dots, X_\alpha)\|_{C^k(K_i, F_i)} \\ &= \sup_{\|X\|=1} \sup_{\beta \leq k} \sup_{x \in K_i} \|d^\beta s_i(x) \cdot (X_1, \dots, X_\alpha)\|_{L^\beta(E_i; F_i)} \\ &= \sup_{\beta \leq k} \sup_{x \in K_i} \|d^\beta s_i(x)\|_{L^\beta(E_i; L^\alpha(E, F_i))} = \|s_i\|_{C^k(K_i, L^\alpha(E; F_i))} \end{aligned}$$

ce qui démontre que Φ_i est une isométrie.

Soient maintenant une partie bornée B de E^α et s un élément de $C^k(L^\alpha(E;E))$. La partie $M = \Phi(s).B$ de $C^k(E)$ est k -équicontinue si et seulement si, pour tout indice i , la partie $M_i = \rho_i^k(\Phi(s).B)$ de $C^k(K_i, F_i)$ est équicontinue ainsi que les famille $d^\beta M_i$ des différentielles jusqu'à l'ordre k . En posant $s_i = {}^* \rho_i^k(s)$ on a $M_i = \Phi_i(s_i).B$ et, pour tout élément $(X_1, \dots, X_\alpha)$ de B il vient

$$||d^\beta[\Phi_i(s_i).(X_1, \dots, X_\alpha)](x) - d^\beta[\Phi_i(s_i).(X_1, \dots, X_\alpha)](x_0)|| =$$

$$||d^\beta s_i(x).(X_1, \dots, X_\alpha) - d^\beta s_i(x_0).(X_1, \dots, X_\alpha)|| \leq R^\alpha ||d^\beta s_i(x) - d^\beta s_i(x_0)||$$

si B est contenu dans la boule de rayon R ; l'application $d^\beta s_i$ étant continue, il en résulte que $d^\beta M_i$ est une partie équicontinue.

L'application Φ est donc une application linéaire continue, injective, prenant ses valeurs dans le sous-espace fermé $L^\alpha(E; C^k(E))$ de $L^\alpha(E; C^k(E))$; si l'image de Φ est égale à $L^\alpha(E; C^k(E))$, l'application Φ est bien l'isomorphisme cherché. Soit u un élément de $L^\alpha(E; C^k(E))$. L'application u de E^α dans $C^k(E)$ étant continue, l'application

$$\tilde{u} : B \times E^\alpha \rightarrow E$$

est k -fois partiellement continûment différentiable en la première variable. On déduit de $\tilde{u}$ une section s de $L^\alpha(E; E)$ qui, si elle est de classe C^k , est telle que $\Phi(s) = u$. Il suffit pour cela que pour tout indice i l'application $s_i = {}^* \rho_i^k(s)$ de K_i dans $L^\alpha(E; F_i)$ soit de classe C^k . Cette application peut être construite à partir de l'application k fois partiellement continûment différentiable en la première variable

$$\tilde{u}_i : K_i \times E^\alpha \rightarrow F_i$$

associée à $u_i = L^\alpha(E; \rho_i^k)(u)$. Soit $\partial^\beta s_i$ l'application de K_i dans

$L^\beta(E_i; L^\alpha(E; F_i))$ associée à l'application $d_{1i}^{\beta\vee}$ de $K_i \times E^\alpha$ dans $L^\beta(E_i; F_i)$.

On a

$$||\partial^{\beta} s_i(x+h) - \partial^{\beta} s_i(x) - \partial^{\beta+1} s_i(x) \cdot h||_{L^\beta(E_i; L^\alpha(E; F_i))} =$$

$$\sup_{||X||=1} ||d_{1i}^{\beta\vee}(x+h; X_1, \dots, X_n) - d_{1i}^{\beta\vee}(x; X_1, \dots, X_n) - d_{1i}^{\beta+1\vee}(x; X_1, \dots, X_n) \cdot h||_{L^\alpha(E_i; F_i)} \leq$$

$$\sup_{||X||=1} \int_0^1 ||d_{1i}^{\beta+1\vee}(x+th; X_1, \dots, X_n) - d_{1i}^{\beta+1\vee}(x; X_1, \dots, X_n)||_{L^{\beta+1}(E_i; F_i)} ||h||_{E_i} dt ;$$

l'hypothèse faite sur u entraîne que pour tout $\beta \leq k$ la famille d'applications $\{d_{1i}^{\beta\vee}(\cdot; X_1, \dots, X_n) \mid ||X|| \leq 1\}$ est équicontinue ; on a donc

$$||\partial^{\beta} s_i(x+h) - \partial^{\beta} s_i(x) - \partial^{\beta+1} s_i(x) \cdot h|| \leq \epsilon ||h||$$

avec ϵ qui tend vers zéro avec $||h||$. Par ailleurs, l'application $\partial^k s_i$ est continue puisque l'on a

$$||\partial^k s_i(x+h) - \partial^k s_i(x)||_{L^k(E_i; L^\alpha(E; F_i))} =$$

$$\sup_{||X||=1} ||d_{1i}^{k\vee}(x+h; X_1, \dots, X_n) - d_{1i}^{k\vee}(x; X_1, \dots, X_n)||_{L^k(E_i; F_i)}$$

et que la famille $\{d_{1i}^{k\vee}(\cdot; X_1, \dots, X_n) \mid ||X|| \leq 1\}$ est équicontinue $\square$

Théorème 1.9. - Pour tous entiers r et s vérifiant $r \geq s$ nous noterons $D(r, s)$ la partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par : (α, β) appartient à $D(r, s)$ si et seulement si $\alpha + \beta \leq r$ et $\beta \leq s$. Soit Ω un ouvert d'un espace de Banach E et E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. Une application f de Ω dans $C^r(E)$ est de classe D^s relativement à la chaîne $C_*^r(E) = \{C^k(E)\}_{k=0}^r$ si et seulement si l'application

$$\tilde{f} : B \times \Omega \rightarrow E \quad (x, y) \rightsquigarrow [f(y)](x)$$

est $D(r,s)$ fois partiellement continûment différentiable.

D'après la remarque 1.6.2.2 une application f de source un espace de Banach est de classe D^s si et seulement si, pour tout entier t vérifiant $0 \leq t \leq s$, l'application composée

$$f^t : \Omega \xrightarrow{f} C^r(E) \xrightarrow{1^t} C^{r-t}(E)$$

est de classe C^t et si pour tout α vérifiant $1 \leq \alpha \leq t$ et tout point x de Ω l'application multilinéaire $d^\alpha f^t(x)$ transforme une partie bornée en un élément de $C^{r-t} = 1^t B^r$. Le théorème résulte donc de la proposition suivante :

Proposition 1.10.- Nous noterons $C(k,s)$ la partie de $N \times N$ définie par : (α, β) appartient à $C(k,s)$ si et seulement si $\alpha \leq k$ et $\beta \leq s$. Soient Ω un ouvert d'un espace de Banach E , E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte et f une application de Ω dans $C^k(E)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i- L'application f est de classe C^s et pour tout α vérifiant $1 \leq \alpha \leq s$ et tout point x de Ω l'application multilinéaire $d^\alpha f(x)$ transforme une partie bornée en une partie k -équicontinue.
- ii- L'application $\tilde{f}$ de $B \times \Omega$ dans E est $C(k,s)$ fois partiellement continûment différentiable.

Si l'application f vérifie la proposition -i-, pour tout $\beta \leq s$ la différentielle $d^\beta f$ prend ses valeurs dans $L^\beta(E; C^k(E))$; d'après le théorème 1.8 elle définit une application encore notée $d^\beta f$ de Ω dans $C^k(L^\beta(E; E))$. La formule de Taylor avec reste intégral nous donne

$$f(y+h) - f(y) - \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{\beta!} d^\beta f(y) \cdot (h)^\beta = \varepsilon(y,h) \cdot (h)^s$$

où ε est une application continue d'un voisinage de $\Omega \times \{0\}$ dans $\Omega \times E$, à valeurs dans $C^k(L^s(E; E))$ telle que $\varepsilon(y,0) = 0$, d'où l'égalité

$$\tilde{f}(x, y+h) - \tilde{f}(x, y) - \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{\beta!} \widetilde{d^\beta f}(x, y) \cdot (h)^\beta = \tilde{\varepsilon}(x, y, h) \cdot (h)^s$$

dont les deux membres sont k fois partiellement continûment différentiable en la première variable d'après la proposition 1.1. Plaçons nous en coordonnées locales et différencions

$$d_1^{\alpha} \tilde{f}_i(x, y+h) - d_1^{\alpha} \tilde{f}_i(x, y) - \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{\beta!} d_1^{\alpha} \widetilde{d^\beta f}_i(x, y) \cdot (h)^\beta = d_1^{\alpha} \tilde{\varepsilon}_i(x, y, h) \cdot (h)^s$$

où $d_1^{\alpha} \tilde{\varepsilon}_i$ est une application continue d'un voisinage de $U_i \times \Omega \times \{0\}$ dans $U_i \times \Omega \times E$ à valeurs dans $L^\alpha(E_i; L^s(E; F_i)) \cong L^s(E; L^\alpha(E_i; F_i))$, nulle avec h ; il en résulte que $d_1^{\alpha} \tilde{f}$ est s fois partiellement continûment différentiable en la seconde variable, donc que f est $C(k, s)$ fois partiellement continûment différentiable.

Réciproquement, si f vérifie -ii-, l'application fibrée $d_\phi^\beta f$ de $B \times \Omega$ dans $L^\beta(E; E)$ est k fois partiellement continûment différentiable en la première variable; elle définit donc d'après la proposition 1.1 une application continue de Ω dans $C^k(L^\beta(E; E))$ d'où, en composant avec l'injection canonique ϕ de $C^k(L^\beta(E; E))$ dans $L^\beta(E; C^k(E))$ une application continue $\partial^\beta f$ de Ω dans $L^\beta(E; C^k(E))$. La formule de Taylor avec reste intégral appliquée à la fonction $f(x, \cdot)$ en coordonnées locales donne

$$\tilde{f}_i(x, y+h) - \tilde{f}_i(x, y) - \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{\beta!} d_2^{\beta} \tilde{f}_i(x, y) \cdot (h)^\beta = \int_0^1 \frac{(1-t)^{s-1}}{(s-1)!} [d_2^s \tilde{f}_i(x, y+th) - d_2^s \tilde{f}_i(x, y)] \cdot (h)^s dt$$

soit, dans l'espace $C^k(E)$

$$f(y+h) - f(y) - \sum_{\beta=1}^s \frac{1}{\beta!} \partial^\beta f(y) \cdot (h)^\beta = \int_0^1 \frac{(1-t)^{s-1}}{(s-1)!} [\partial^\beta f(y+th) - \partial^\beta f(y)] \cdot (h)^s dt$$

L'application $\partial^s f$ étant continue, il en résulte que f est de classe C^s et que $d^\beta f(y) = \partial^\beta f(y)$ est dans l'image de $C^k(L^\beta(E; E))$, c'est-à-dire transforme une partie bornée en une partie k -équicontinue $\square$

Remarque 1.11.- Si l'espace E source de l'application f est de

dimension finie, toute application multilinéaire continue de E dans $C^k(E)$ transforme une partie bornée en une partie pré-compacte, donc un élément de C^k . La proposition 1.10 donne dans ce cas une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application de source un espace de dimension finie et de but $C^k(E)$ soit de classe C^S .

Corollaire 1.12?-- Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. L'application d'évaluation

$$ev : B \times C^r(E) \rightarrow E \quad (x,s) \rightsquigarrow s(x)$$

est de classe C^r .

L'application identique de $C^r(E)$ est une application linéaire continue, donc une application de classe D^r de l'espace de Banach $C^r(E)$ dans la chaîne $C_*^r(E)$. D'après le théorème 1.9 l'application $\widetilde{1}_{C^r(E)} = ev$ est $D(r,r)$ fois partiellement continûment différentiable donc de classe C^r $\square$

On a en fait le résultat plus fort suivant :

Théorème 1.13.- Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. L'application d'évaluation

$$ev : B \times C^r(E) \rightarrow E \quad (x,s) \rightsquigarrow s(x)$$

est de classe D^r relativement à la chaîne $C_*^r(E)$ et aux structures de variétés banachiques de B et de E .

Pour étudier cette application au voisinage d'un point (x,s) , nous choisissons une carte locale (V,ϕ,E) de B au point x , une carte locale $(p^{-1}(V),\psi,F)$ de E et un voisinage U de x tel que $\bar{U}$ soit compact et contenu dans V ; soient K le compact de E image de $\bar{U}$ par ϕ et A_K la norme de l'application linéaire continue de $C^k(E)$ dans $C^k(K,F)$ qui associe à la

section s l'application

$$s_K = \pi_2 \circ \psi \circ (s|_K) \circ \phi^{-1}$$

L'application d'évaluation s'écrit en coordonnées locales sous la forme

$$K \times C^r(E) \rightarrow K \times F \quad (x, s) \rightsquigarrow (x, s_K(x)) ,$$

c'est-à-dire le produit de la projection sur K qui est de classe D^r et de l'application

$$ev_K : K \times C^r(E) \rightarrow F \quad (x, s) \rightsquigarrow s_K(x) .$$

D'après la remarque 1.6.2.4 cette application est de classe D^r si et seulement si elle est de classe C^r et si pour tout $\alpha \leq r$ l'application $d^\alpha ev_K$ se factorise en une application localement bornée $\Delta^\alpha ev_K$ de $K \times C^r(E)$ dans $L^\alpha(E \times C^{\alpha-1}(E); F)$. Le premier point résulte du corollaire 1.12 et

$$d^\alpha ev_K(x, s) \cdot (X^1, \dots, X^\alpha; S^1, \dots, S^\alpha) = d^\alpha s_K(x) \cdot (X^1, \dots, X^\alpha) + \sum_{i=1}^{\alpha} d^{\alpha-1} s_K^i(x) \cdot (X^1, \dots, \hat{X}^i, \dots, X^\alpha)$$

est encore défini pour des sections S^i de classe $C^{\alpha-1}$, d'où une application $\Delta^\alpha ev_K(x, s)$ qui vérifie l'inégalité

$$|| \Delta^\alpha ev_K(x, s) \cdot (X^1, \dots, X^\alpha; S^1, \dots, S^\alpha) || \leq A_r ||s||_{C^r(E)} ||X||^{\alpha + \alpha A_{\alpha-1}} ||S||_{C^{\alpha-1}(E)} ||X||^{\alpha-1},$$

soit encore

$$|| \Delta^\alpha ev_K(x, s) || \leq A_r ||s||_{C^r(E)}^{\alpha A_{\alpha-1}}$$

ce qui démontre que l'application $\Delta^\alpha ev_K$ est localement bornée $\square$

Il est possible de donner une caractérisation des applications de classe D^S de source une chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$ de $\underline{C}^r$ à valeurs dans une chaîne de sections $C_*^r(E)$ sur le modèle du théorème 1.9, c'est-à-dire par des propriétés

de l'application

$$B \times E^r \supset B \times \Omega \xrightarrow{\tilde{f}} E \quad (x,y) \rightsquigarrow [f(y)](x)$$

où le premier membre est le produit de la variété banachique B de classe C^r et de l'ouvert Ω considéré comme variété de classe D^r modelée sur l'objet $\{E^k\}_{k=0}^r$ de $\underline{C}^r$ et le second membre est une variété banachique de classe C^r . L'expression de cette caractérisation suppose en général le développement d'une théorie de "dérivabilité partielle" que nous n'avons pas voulu intégrer au présent mémoire où elle n'est pas nécessaire ; fait exception le cas où $r = s$, la condition d'être " $D(r,r)$ fois partiellement continûment dérivable" se réduisant à celle d'être de classe D^r . Dans ce cas particulier nous pouvons donc énoncer :

Théorème 1.14.- Soient $\{E^k\}_{k=0}^r$ un objet de $\underline{C}^r$, Ω un ouvert de E^r , E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte et f une application de Ω dans $C^r(E)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que l'application f soit de classe D^r relativement aux chaînes $\{E^k\}_{k=0}^r$ et $C_*^r(E)$ est que l'application

$$\tilde{f} : B \times \Omega \rightarrow E \quad (x,y) \rightsquigarrow [f(y)](x)$$

soit de classe D^r relativement aux structures de variétés banachiques sur B et E et à la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$

La condition est nécessaire car f admet la factorisation

$$\tilde{f} : B \times \Omega \xrightarrow{1_B \times f} B \times C^r(E) \xrightarrow{ev} E$$

où f est de classe D^r relativement aux chaînes $\{E^k\}_{k=0}^r$ et $C_*^r(E)$ et où ev est de classe D^r relativement à la chaîne $C_*^r(E)$ d'après le théorème 1.13.

Supposons maintenant que f soit de classe D^r . Cette application est à fortiori de classe C^r relativement aux structures banachiques, ce qui entraîne d'après le théorème 1.9 que f est de classe D^r relativement à l'es-

pace de Banach E^r et à la chaîne $C_*^r(E)$. Nous allons utiliser la remarque 1.6.3 pour démontrer que f est de classe D^r relativement à la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$: si l'on note f^t l'application composée de f et de l'injection canonique de $C^r(E)$ dans $C^{r-t}(E)$ nous devons montrer que l'application

$$\Omega \times (E^r)^t \rightarrow C^{r-t}(E) \quad (y, Y^1, \dots, Y^t) \rightsquigarrow d^t f^t(y) \cdot (Y^1, \dots, Y^t)$$

admet des extensions continues de $\Omega \times (E^k)^t$ dans $C^{k-t+1}(E)$ pour tout k vérifiant $t-1 \leq k \leq r-1$, ce qui est équivalent d'après la proposition 1.1 à montrer que l'application

$$F^t : B \times \Omega \times (E^r)^t \rightarrow E \quad (x, y, Y^1, \dots, Y^t) \rightsquigarrow [d^t f^t(y) \cdot (Y^1, \dots, Y^t)](x)$$

admet des extensions $(k-t+1)$ fois partiellement continûment différentiable en la première variable de $B \times \Omega \times (E^k)^t$ dans E . Par ailleurs, l'application $d^t f^t$ étant (cf. la démonstration de la proposition 1.10) l'application composée de l'injection canonique de $C^{r-t}(L^t(E^r; E))$ dans $L^t(E^r; C^{r-t}(E))$ et de l'application de Ω dans $C^{r-t}(L^t(E^r; E))$ induite par la différentielle fibrée

$$d_\phi^t \tilde{f} : B \times \Omega \rightarrow L^t(E^r; E),$$

l'application F^t peut encore s'écrire

$$F^t(x, y; Y^1, \dots, Y^t) = d_\phi^t \tilde{f}(x, y) \cdot (Y^1, \dots, Y^t).$$

Si l'on choisit des coordonnées locales sur B et E , l'application $\tilde{f}$ s'écrit sous la forme

$$U \times \Omega \rightarrow U \times F \quad (x, y) \rightsquigarrow (x, \tilde{f}_U(x, y))$$

où l'application $\tilde{f}_U$ est de classe D^r relativement à l'espace de Banach E dont U est un ouvert, la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$ et l'espace de Banach F . Il en résulte que l'application

$$U \times \Omega \times (E \times E^r)^t \rightarrow F \quad (x, y; (X^1, Y^1), \dots, (X^t, Y^t)) \rightsquigarrow d_k^t \tilde{f}_U(x, y) \cdot ((X^1, Y^1), \dots, (X^t, Y^t))$$

admet des extensions continues de $U \times \Omega \times (E \times E^k)^t$ dans F , pour $k \geq 1$, d'où les extensions continues F_k^t de F^t à $U \times \Omega \times (E^k)^t$ en posant

$$F_k^t(x, y; Y^1, \dots, Y^t) = \delta_k^t \tilde{f}_U(x, y) \cdot ((0, Y^1), \dots, (0, Y^t)) .$$

Enfin, pour montrer que l'extension F_k^t est $(k-t+1)$ fois partiellement continûment différentiable en la première variable il suffit, l'espace E^r étant dense dans l'espace E^k , de montrer qu'il existe pour $\alpha \leq k-t+1$ des applications continues

$$d_{1k}^{\alpha t} F_k^t : U \times \Omega \times (E^k)^t \rightarrow L^\alpha(E; F)$$

dont la restriction à $U \times \Omega \times (E^r)^t$ soient les différentielles partielles de F^t ; ces applications sont définies par

$$d_{1k}^{\alpha t} F_k^t(x, y; Y^1, \dots, Y^t) = \delta_k^{t+\alpha} \tilde{f}_U(x, y) \cdot ((., 0), \dots, (., 0), (0, Y^1), \dots, (0, Y^t)) \quad \square$$

§ 2 - VARIETES DES SECTIONS DIFFERENTIABLES D'UN ESPACE FIBRE.

Définition 2.1. - Soit $E = (E, p, B, F, G, \phi)$ un espace fibré différentiable de classe C^r , d'espace total E , projection p , base B , fibre F et groupe structural G . Nous dirons que l'espace fibré E admet une application exponentielle s'il existe un espace fibré vectoriel F de base E , de classe C^r , un voisinage U de la section nulle de F et une application Exp de U dans le produit fibré $E \times_B E$ telle que

1. Le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} F \supset U & \xrightarrow{\quad} & E \times_B E \\ \downarrow q & & \downarrow \pi_1 \\ E & \xlongequal{\quad} & E \end{array}$$

où q est la projection de F sur sa base E et π_1 est la projection du produit fibré $E \times_B E$ sur son premier facteur (nous représentons par abus de notation l'espace total du fibré F par la même lettre F).

2. Exp transforme la section nulle en la section diagonale.

3. Exp est un difféomorphisme de classe C^r de U sur un voisinage de la diagonale.

Remarque 2.2. - Si l'on identifie une variété X de classe C^r à l'espace total du fibré de base un point, de fibre X et de groupe nul, la notion d'application exponentielle pour ce fibré coïncide avec la notion d'application exponentielle pour la variété X .

Remarque 2.3. - Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un fibré trivial $E = (B \times F, p, B, F, 0, 1_F)$ admette une application exponentielle est que la variété F admette une application exponentielle.

Proposition 2.4.- Si une variété X de classe C^r , avec $r \geq 1$, admet une application exponentielle, l'espace total du fibré tangent de X , considéré comme une variété de classe C^{r-1} , admet une application exponentielle.

Soit (F, U, Exp) une application exponentielle sur X . L'espace TF fibré sur TX par l'application tangente Tq de la projection q de F sur sa base X , définit un espace fibré vectoriel de classe C^{r-1} dans lequel le sous-espace TU est un voisinage de la section nulle. L'application $T\text{Exp}$ de classe C^{r-1} rend commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 TF \supset TU & \xrightarrow{T\text{Exp}} & T(X \times X) \cong TX \times TX & & \\
 \downarrow Tq & & \downarrow T\pi_1 & & \downarrow \pi_1 \\
 TX & \xlongequal{\quad} & TX & \xlongequal{\quad} & TX
 \end{array}$$

et c'est une application exponentielle sur TX $\square$

Proposition 2.5.- Soit X une variété de classe C^r . S'il existe un difféomorphisme de classe C^r de X sur une variété $\bar{X}$ de classe C^{r+2} admettant des partitions de l'unité, la variété X admet une application exponentielle.

Cela résulte de la construction classique d'un spray sur $\bar{X}$ [1] $\square$

Corollaire 2.6.- Toute variété différentiable paracompacte et de dimension finie admet une application exponentielle.

Définition 2.7.- Soit G un groupe de Lie. Nous dirons qu'une G -variété X de classe C^r admet une G -application exponentielle s'il existe un G -espace fibré vectoriel F de base X , de classe C^r , un voisinage U de la section nulle de F stable pour l'action de G et une application

équivariante Exp de U dans $X \times X$ qui soit une application exponentielle sur X .

Proposition 2.8.- Soient G un groupe de Lie compact et X une G -variété de classe C^r . S'il existe un difféomorphisme équivariant de classe C^r de X sur une G -variété $\bar{X}$ de classe C^{r+2} admettant des partitions de l'unité, la G -variété X admet une G -application exponentielle.

Nous noterons $\Phi : G \times \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ l'action de G sur $\bar{X}$ et $\Phi_g : \bar{X} \rightarrow \bar{X}$ l'action de l'élément g de G sur $\bar{X}$. Le groupe G opère sur le fibré $T^2\bar{X} = T(T\bar{X})$ par

$$T_2(T_2\Phi) : G \times T^2\bar{X} \rightarrow T^2\bar{X}$$

d'où l'on déduit une action de G sur les sections de classe C^r de ce fibré : si g est un élément de G et s une section de classe C^r de $T^2\bar{X}$, on pose

$$\mathcal{E}_s = T^2\Phi_g \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}}.$$

Les hypothèses faites sur X entraînent que l'ensemble des sprays de classe C^r sur $\bar{X}$ n'est pas vide et l'on vérifie que cet ensemble est stable pour l'action de G : si τ est la projection de $T\bar{X}$ sur $\bar{X}$ on a

$$\begin{aligned} T\tau \circ \mathcal{E}_s &= T\tau \circ T^2\Phi_g \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} = T(\tau \circ T\Phi_g) \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} \\ &= T(\Phi_g \circ \tau) \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} = T\Phi_g \circ T\tau \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} \\ &= T\Phi_g \circ 1_{T\bar{X}} \circ T\Phi_{g^{-1}} = 1_{T\bar{X}} \end{aligned}$$

et si $\lambda : T\bar{X} \rightarrow T\bar{X}$ est la multiplication par le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s \circ \lambda &= T^2\Phi_g \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} \circ \lambda = T^2\Phi_g \circ s \circ \lambda \circ T\Phi_{g^{-1}} \\ &= T^2\Phi_g \circ T\lambda \circ \lambda \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} = T(T\Phi_g \circ \lambda) \circ \lambda \circ s \circ T\Phi_{g^{-1}} \end{aligned}$$

$$= T(\lambda \circ T\Phi_g) \circ \lambda \circ s \circ T\Phi_g^{-1} = T\lambda \circ \lambda \circ T\Phi_f \circ s \circ T\Phi_g^{-1} = T\lambda \circ \lambda \circ \mathcal{E}_s .$$

Choisissons sur G une mesure μ de masse totale 1, invariante par translations à gauche. Soit s une section de classe C^r de $T^2\bar{X}$; on pose pour tout point v de $T\bar{X}$

$$S(v) = \int_G \mathcal{E}_s(v) \mu(g) ,$$

cette intégrale prenant ses valeurs dans la fibre en v de $T^2\bar{X}$. On vérifie en coordonnées locales que S est une section de classe C^r de $T^2\bar{X}$; la section S est invariante par G :

$$hS(v) = \int_G h\mathcal{E}_s(v) \mu(g) = \int_G h\mathcal{E}_s(v) \mu(hg) = S(v) ;$$

enfin, si s est un spray, il en est de même pour S :

$$T\tau \circ S(v) = \int_G T\tau \circ \mathcal{E}_s(v) \mu(g) = \int_G v \mu(g) = v = 1_{T\bar{X}}(v)$$

et

$$S \circ \lambda(v) = \int_G \mathcal{E}_s \circ \lambda(v) \mu(g) = \int_G T\lambda \circ \lambda \circ \mathcal{E}_s(v) \mu(g) = T\lambda \circ \lambda \circ S(v) .$$

Nous avons donc établi l'existence d'un spray de classe C^r , invariant par G , sur $\bar{X}$. Soit β_v la courbe intégrale de S telle que $\beta_v(0) = v$.

Considérons

$$\beta = T\Phi_g \circ \beta_v ;$$

il vient

$$\dot{\beta} = T^2\Phi_g \circ \dot{\beta}_v = T^2\Phi_g \circ S \circ \beta_v = S \circ T\Phi_g \circ \beta_v = S \circ \beta$$

et l'on a donc

$$\beta_{T\Phi_g(v)} = T\Phi_g \circ \beta_v .$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \exp_S \circ T\Phi_g(v) &= \tau \circ \beta_{T\Phi_g(v)}(1) = \tau \circ T\Phi_g \circ \beta_v(1) \\ &= \Phi_g \circ \tau \circ \beta_v(1) = \Phi_g \circ \exp_S(v) \end{aligned}$$



c'est-à-dire que l'application $\exp_S$ est équivariante, d'où une G -application exponentielle sur X $\square$

Proposition 2.9.- Soit $E = (E, p, B, F, C, \Phi)$ un espace fibré de classe C^r . Si la G variété F admet une G -application exponentielle, l'espace fibré F admet une application exponentielle.

On choisit une G -application exponentielle (F, U, Exp) sur F et un atlas $A = \{p^{-1}(U_\alpha), \psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ du fibré E ; soient $\{\gamma_{\beta, \alpha}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G\}_{(\alpha, \beta) \in A \times A}$ les fonctions de transition de cet atlas. On construit un fibré $\hat{F}$ de base E en recollant les fibrés $U_\alpha \times F$ grâce aux fonctions $\gamma_{\beta, \alpha}$; ce qui est possible puisque par hypothèse F est un G -fibré; les applications

$$U_\alpha \times F \supset U_\alpha \times U \xrightarrow{1_{U_\alpha} \times \text{Exp}} U_\alpha \times F \times F$$

se recollent alors en une application $\hat{\text{Exp}}$ d'un voisinage $\hat{U}$ de la section nulle de $\hat{F}$ dans $E \times_B E$ puisque l'application Exp est équivariante. Le triple $(\hat{F}, \hat{U}, \hat{\text{Exp}})$ est une application exponentielle pour l'espace fibré E $\square$

Corollaire 2.10.- Soient X et Y deux variétés de classe C^{r+1} . Si la variété Y admet une application exponentielle, l'espace fibré $L(TX; TY)$ des applications linéaires de TX dans TY , admet une application exponentielle.

Supposons que X soit modelée sur un espace E . L'espace fibré $L(TX; TY)$ a pour fibre l'espace total du fibré $L(E; TY)$ et pour groupe structural le groupe linéaire $G = \text{Gl}(E)$; d'après la proposition 2.9 il suffit de montrer que la G -variété $L(E; TY)$ admet une G -application exponentielle. Soit

$$\begin{array}{ccc} F \supset U & \xrightarrow{\text{Exp}} & Y \times Y \\ \downarrow q & & \downarrow \pi_1 \\ Y & \xlongequal{\quad} & Y \end{array}$$

une application exponentielle sur Y . Par différentiation on a les morphismes de fibrés

$$\begin{array}{ccccc}
 TY & \xleftarrow{Tq} & TF \supset TU & \xrightarrow{T \text{ Exp}} & T(Y \times Y) \cong TY \times TY \\
 \downarrow \tau & & \downarrow & & \downarrow \\
 Y & \xleftarrow{q} & F \supset U & \xrightarrow{\text{Exp}} & Y \times Y
 \end{array}$$

$\nearrow \tau \times \tau$

d'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 L(E; TF) \supset L(E; TU) & \xrightarrow{L(E; T \text{ Exp})} & L(E; TY \times TY) \cong L(E; TY) \times L(E; TY) \\
 \downarrow L(E; Tq) & & \downarrow L(E; \tau \times \tau) \\
 L(E; TY) & \xlongequal{\quad} & L(E; TY)
 \end{array}$$

$\nearrow \pi_1$

où $(L(E; TF), L(E; Tq), L(E; TY))$ est un espace fibré vectoriel de classe C^r (cela est immédiat en coordonnées locales), $L(E; TU)$ un voisinage de la section nulle, $L(E; T \text{ Exp})$ un difféomorphisme de classe C^r transformant la section nulle en la section diagonale ; la fonctorialité de $L(.,.)$ relativement à la première variable entraîne enfin que $L(E; T \text{ Exp})$ est une application équivariante pour l'action de $Gl(E)$ $\square$

Corollaire 2.11. - Un espace fibré vectoriel de classe C^r admet une application exponentielle.

La fibre E de cet espace fibré est une $Gl(E)$ -variété qui admet une $Gl(E)$ -application exponentielle : on prend pour fibré F le fibré trivial $E \times E$, pour voisinage U l'espace total et pour application Exp l'application identique de $E \times E$. On peut donc appliquer la proposition 2.9 $\square$

Ce corollaire montre que l'identification de l'espace des sections de classe C^r d'un espace fibré vectoriel de base compacte à un objet de $\underline{SC}^r$

est un cas ~~particulier~~ du théorème suivant relatif aux sections de classe C^r d'un espace fibré quelconque :

Théorème 2.12.- Soit $E = (E, p, B, F, G, \Phi)$ un espace fibré de classe C^r , de base compacte, admettant une application exponentielle. Il existe une structure de variété de classe D^r modélée sur des objets de $\underline{SC}^r$ sur l'ensemble $C^r(E)$ des sections de classe C^r de E .

Soit g un élément de $C^r(E)$ et (F, U, Exp) une application exponentielle sur E . Nous considérons l'espace fibré $F_g = g^*F$ image réciproque de F par l'application g et U_g l'image réciproque du voisinage U ; les sections de classe C^r de F_g prenant leurs valeurs dans U_g constituent un voisinage $C^r(U_g)$ de l'origine de l'espace de Banach $C^r(U_g)$. Si f est un élément de $C^r(U_g)$, l'application composée

$$\begin{array}{ccccccc} B & \xrightarrow{f} & U_g & \xrightarrow{\quad} & U & \xrightarrow{\text{Exp}} & E \times_B E \xrightarrow{\pi_2} E \\ & & \cap & & \cap & & \\ & & F_g & \xrightarrow{\bar{g}} & F & & \end{array}$$

est une section de classe C^r de E ; on définit donc une application injective

$$\phi_g^{\text{Exp}} : C^r(U_g) \rightarrow C^r(E) \quad f \mapsto \pi_2 \circ \text{Exp} \circ \bar{g} \circ f$$

telle que $\phi_g^{\text{Exp}}(0) = g$, c'est-à-dire une carte locale de $C^r(E)$ au point g .

Soient maintenant deux cartes locales de ce type en des points g_1 et g_2 , construites à partir d'applications exponentielles (F_1, U_1, Exp_1) et (F_2, U_2, Exp_2) . On considère l'application de classe C^r d'un ouvert de $g_1^*F_1$ dans F_2 , respectant les fibrations, définie par :

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} g_1^*F_1 & \xrightarrow{\bar{g}_1} & F_1 \supset U_1 & \xrightarrow{\text{Exp}_1} & E \times_B E & \xrightarrow{\pi_2} & E & \xrightarrow{(g_2 \circ p)_B \times 1_E} & E \times_B E \supset V_2 & \xrightarrow{\text{Exp}_2^{-1}} & F \\ \downarrow & & \downarrow q_1 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow p & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow q_2 \\ B & \xrightarrow{g_1} & E & \xrightarrow{\quad} & E & \xrightarrow{p} & B & \xrightarrow{g_2} & E & \xrightarrow{\quad} & E \end{array}$$

cette application étant fibrée au-dessus de g_2 , elle se factorise en une application g_{21} de classe C^r d'un ouvert U_{21} de $g_1^{*F_1}$ dans $g_2^{*F_2}$, respectant les fibrations et induisant l'identité sur la base. Il apparaît clairement que le changement de cartes entre $\phi_{g_1}^{\text{Exp}_1}$ et $\phi_{g_2}^{\text{Exp}_2}$ est donné par l'application

$$\omega_{g_{21}} : C^r(U_{21}) \rightarrow C^r(g_2^{*F_2}) \quad f \rightsquigarrow g_{21} \circ f$$

et cette application est, d'après le théorème 1.14, de classe D^r relativement aux chaînes $C_*^r(g_1^{*F_1})$ et $C_*^r(g_2^{*F_2})$ puisque l'application $\widetilde{\omega}_{g_{21}}$ qui admet la factorisation

$$\widetilde{\omega}_{g_{21}} : B \times C^r(U_{21}) \xrightarrow{\text{ev}} 21 \xrightarrow{g_{21}} g_2^{*F_2}$$

est de classe D^r , l'application d'évaluation ev étant de classe D^r d'après le théorème 1.13 et g_{21} étant de classe C^r .

La structure de variété de classe D^r sur $C^r(E)$ est alors définie par un atlas du type $\{\phi_g^{\text{Exp}}\}_{g \in C^r(E)}$ construit à partir d'une application exponentielle fixée ; deux tels atlas sont équivalents $\square$

Corollaire 2.13.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Il existe une structure de variété de classe D^r modelée sur des objets de $\underline{\underline{SC}}^r$ sur l'ensemble $C^r(X, Y)$ des applications de classe C^r de X dans Y .

On applique le théorème 2.12 au fibré trivial $X \times Y$ de base X $\square$

Corollaire 2.14.-- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Si $r \geq 1$ il existe une structure de variété de classe D^{r-1} modelée sur des objets de $\underline{\underline{SC}}^{r-1}$ sur l'ensemble $VB^{r-1}(TX, TY)$ des morphismes de fibrés vectoriels de classe C^{r-1} entre les espaces fibrés tangents de X et de Y .

L'espace $VB^{r-1}(TX, TY)$ s'identifie à l'espace des sections de classe C^{r-1} de l'espace fibré $L(TX, TY)$, de base compacte X , qui admet une application exponentielle (corollaire 2.10) ; on applique le théorème 2.12 à cet espace fibré $\square$

Les théorèmes démontrés au paragraphe 1 pour les chaînes de sections d'un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte s'appliquent en coordonnées locales aux variétés de classe D^r construites au théorème 2.12 ; ils admettent alors les expressions globales suivantes :

Théorème 2.15.- Soit $E = (E, p, B, F, G, \Phi)$ un espace fibré de classe C^r de base compacte, admettant une application exponentielle et soit V une variété banachique de classe C^s . Une application f de V dans $C^r(E)$ est de classe D^s si et seulement si l'application

$$\tilde{f} : B \times V \rightarrow E \quad (x, y) \rightsquigarrow [f(y)](x)$$

est $D(r, s)$ fois partiellement continûment différentiable.

Théorème 2.16.- Soit $E = (E, p, B, F, G, \Phi)$ un espace fibré de classe C^r de base compacte, admettant une application exponentielle et soit V une variété de classe D^r , modelée sur des objets de $\underline{C}^r$. Une application f de V dans $C^r(E)$ est de classe D^r si et seulement si l'application

$$\tilde{f} : B \times V \rightarrow E \quad (x, y) \rightsquigarrow [f(y)](x)$$

est de classe D^r .

Théorème 2.17.- Soit $E = (E, p, B, F, G, \Phi)$ un espace fibré de classe C^r , de base compacte, admettant une application exponentielle. L'application d'évaluation

$$\text{ev} : B \times C^r(E) \rightarrow E \qquad (x, g) \mapsto g(x)$$

est une application de classe D^r .

Remarque 2.18. - Nous avons considéré au §.1 comme au §.2 les espaces de sections de classe C^r , avec r fini, d'espaces fibrés différentiables. Une étude analogue du cas $r = \infty$ est possible ; cependant, toutes les applications rencontrées dans ce cas (applications naturelles aussi bien que changement de cartes) étant limite des applications correspondantes pour r fini et toutes les variétés étant modelées sur des objets des sous-catégories $\underline{\underline{SC}}^r$, la proposition 1.5.10 permet de déduire les propriétés des espaces de sections de classe C^∞ des propriétés des espaces de sections de classe finie. D'une manière générale, tous les théorèmes démontrés et tous ceux qui seront démontrés dans la suite de ce mémoire sont valables sans modification pour $r = \infty$ alors même que la démonstration n'en est donnée que pour r fini.

§ 3 - VARIETES D'APPLICATIONS DIFFERENTIABLES.

Nous proposons d'étudier le cas particulier cité au corollaire 2.14 c'est-à-dire l'espace $C^r(X,Y)$ des applications de classe C^r d'une variété compacte X dans une variété Y de classe C^r admettant une application exponentielle. Les résultats généraux sur la caractérisation d'une application de classe D^s de but une variété de sections et sur l'application d'évaluation s'appliquent à ce cas particulier et l'on a les propriétés suivantes :

3.1.- Une application f d'une variété banachique V dans une variété d'applications $C^r(X,Y)$ est de classe D^s si et seulement si l'application

$$\tilde{f} : X \times V \rightarrow Y \quad (x,t) \rightsquigarrow [f(t)](x)$$

est $D(r,s)$ fois partiellement continûment différentiable.

3.2.- Une application f d'une variété V de classe D^r dans une variété d'applications $C^r(X,Y)$ est de classe D^r si et seulement si l'application

$$\tilde{f} : X \times V \rightarrow Y \quad (x,t) \rightsquigarrow [f(t)](x)$$

est de classe D^r .

3.3.- L'application d'évaluation

$$\text{ev} : X \times C^r(X,Y) \rightarrow Y \quad (x,f) \rightsquigarrow f(x)$$

est de classe D^r .

Certaines applications naturelles présentent encore des propriétés de dérivabilité :

Théorème 3.4.- Soient X et Y deux variétés compactes de classe C^r et Z une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'application de composition

$$\gamma : C^r(X,Y) \times C^r(Y,Z) \rightarrow C^r(X,Z) \quad (f,g) \rightsquigarrow g \circ f$$

est de classe D^r .

D'après 3.2 il suffit de montrer que $\tilde{\gamma}$ est de classe D^r ; or cette application admet la factorisation suivante par des applications de classe D^r :

$$X \times C^r(X,Y) \times C^r(Y,Z) \xrightarrow{\text{ev} \times 1_{C^r(Y,Z)}} Y \times C^r(Y,Z) \xrightarrow{\text{ev}} Z \quad \square$$

Théorème 3.5.- Soient X une variété compacte de classe C^r , Y et Z deux variétés de classe C^r admettant une application exponentielle et g une application de classe C^r de Y dans Z . L'application

$$\omega_g : C^r(X,Y) \rightarrow C^r(X,Z) \quad f \rightsquigarrow g \circ f$$

est de classe D^r .

Il suffit de montrer que l'application $\tilde{\omega}_g$ est de classe D^r , ce qui résulte de la factorisation suivante par des applications de classe D^r

$$X \times C^r(X,Y) \xrightarrow{\text{ev}} Y \xrightarrow{g} Z \quad \square$$

Théorème 3.6.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'application η de Y dans $C^r(X,Y)$ qui associe à un point y de Y l'application constante $\hat{y}$ de X dans Y , de valeur y , est de classe D^r . L'image de est une sous-variété de classe D^r de $C^r(X,Y)$ et η est un difféomorphisme de classe D^r de Y sur cette sous-variété.

L'application $\tilde{\eta}$ s'identifiant à la projection de $X \times Y$ sur Y est de classe C^r , donc η est de classe D^r d'après 3.1.

On choisit une application exponentielle (F, U, Exp) sur Y et l'on considère l'atlas associé de $C^r(X, Y)$. La carte canonique en le point $\hat{y}$ de $C^r(X, Y)$ se construit à partir de la chaîne des sections de l'espace fibré vectoriel image réciproque $\hat{y}^*F$: l'application $\hat{y}$ étant constante, $\hat{y}^*F$ est le fibré trivial $X \times F_y$ où F_y est la fibre de F au point y et la chaîne $C_*^r(\hat{y}^*F)$ s'identifie à la chaîne $C_*^r(X, F_y) = \{C^k(X, F_y)\}_{k=0}^r$; un élément ϕ de cette carte correspond à une application constante de X dans Y si et seulement si ϕ est une application constante de X dans F_y . Nous allons montrer que le sous-espace des applications constantes est isomorphe à F_y et que c'est, dans la catégorie $\underline{C}^r$, un facteur direct de la chaîne $C_*^r(X, F_y)$. Pour cela, notons ϵ^k l'application linéaire continue de F_y dans $C^k(X, F_y)$ qui associe à un élément de F_y l'application constante de valeur cet élément et, pour un point a fixé dans X , ev_a^k l'application d'évaluation au point a , qui est une application linéaire et continue de $C^k(X, F_y)$ dans F_y ; il est clair que $\text{ev}_a^k \circ \epsilon^k$ est l'identité de F_y et que l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 F_y & \xrightarrow{\epsilon^r} & C^r(X, F_y) & \xrightarrow{\text{ev}_a^r} & F_y \\
 \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 F_y & \xrightarrow{\epsilon^{r-1}} & C^{r-1}(X, F_y) & \xrightarrow{\text{ev}_a^{r-1}} & F_y \\
 \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 F_y & \xrightarrow{\epsilon^0} & C^0(X, F_y) & \xrightarrow{\text{ev}_a^0} & F_y
 \end{array}$$

d'où le résultat. Le sous-espace des applications constantes de $C^r(X, Y)$ est donc une sous-variété de classe D^r , modelée sur des espaces de Banach, donc une variété de classe C^r au sens usuel.

Pour montrer que η est un difféomorphisme sur son image, il suffit de constater que l'application d'évaluation en un point a de X

$$\text{ev}_a : C^r(X, Y) \rightarrow Y \quad f \mapsto f(a)$$

est de classe D^r d'après 3.3 et que sa restriction à la sous-variété des applications constantes est une application de classe D^r qui est l'application inverse de η $\square$

Toute variété de classe D^r est, pour h vérifiant $0 \leq h \leq r$, également une variété de classe D^{r-h} : le foncteur de $\underline{C}^r$ dans $\underline{C}^{r-h}$ qui associe à une chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$ la chaîne $\{E_h^k\}_{k=0}^{r-h}$ définie par $E_h^k = E^{k+h}$, transforme en effet un atlas de classe D^r en un atlas de classe D^{r-h} . Etant donné une variété X de classe D^r nous noterons $V_h X$ la variété X munie de sa structure de variété de classe D^{r-h} ; avec cette notation, $V_0 X$ est la variété X elle-même et $V_r X$ est la variété topologique sous-jacente à X .

Théorème 3.7. - Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Pour tout h vérifiant $0 \leq h \leq r$, l'application d'inclusion

$$V_h C^r(X, Y) \rightarrow C^{r-h}(X, Y) \quad f \mapsto f$$

est de classe D^{r-h} .

Relativement aux cartes canoniques de $V_h C^r(X, Y)$ et $C^{r-h}(X, Y)$ en un point f de $C^r(X, Y)$, cette application est un morphisme de $\underline{C}^{r-h}$, donc une application de classe D^{r-h} $\square$

Si Y est une variété de classe C^r admettant une application exponentielle, la variété TY de classe C^{r-1} admet une application exponentielle (proposition 2.4) ; si X est une variété compacte de classe C^r ,

l'espace $C^{r-h}(X, TY)$ est donc une variété de classe D^{r-h} et la projection τ_Y de TY sur Y induit une projection ω_{τ_Y} de $C^{r-h}(X, TY)$ sur $C^{r-h}(X, Y)$ qui est de classe D^{r-h} d'après le théorème 3.5.

Théorème 3.8.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Si $r \geq 1$ l'espace tangent $T_h C^r(X, Y)$ est, dans la catégorie des variétés de classe D^{r-h} , le produit fibré de $C^{r-h}(X, TY)$ est de $V_h C^r(X, Y)$ relativement à ω_{τ_Y} et à l'inclusion canonique de $V_h C^r(X, Y)$ dans $C^{r-h}(X, Y)$.

Soit $(TF, TU, Texp)$ l'application exponentielle sur TY dérivée d'une application exponentielle (F, U, Exp) sur Y ; nous allons étudier les cartes locales canoniques de $C^{r-h}(X, TY)$ en les éléments $f_o = s_o \circ f$ où s_o est la section nulle de TY et f une application de classe C^{r-h} de X dans Y : la forme de TU montre que ces cartes sont saturées pour la projection ω_{τ_Y} et qu'elles forment donc un atlas de $C^{r-h}(X, TY)$. L'image réciproque du fibré (TF, T_p, TY) par l'application s_o s'identifie à la somme de Whitney $F \oplus F$ et l'image réciproque de TU à $U \oplus F$: la carte en f_o a donc pour image l'ouvert $C^{r-h}(f_o^* TU) \cong C^{r-h}(f^* U) \times C^{r-h}(f^* F)$ de $C^{r-h}(f_o^* TF) \cong C^{r-h}(f^* F) \times C^{r-h}(f^* F)$. Si l'on se place plus particulièrement en un point $f_o = s_o \circ f$ avec f de classe C^r , le problème du produit fibré se ramène en coordonnées locales au produit fibré de $C^{r-h}(f^* U) \times C^{r-h}(f^* F)$ et de $C^r(f^* U)$ relativement à la projection sur le premier facteur et à l'inclusion canonique de $C^r(f^* U)$ dans $C^{r-h}(f^* U)$; il en résulte pour le produit fibré une carte locale d'image $C^r(f^* U) \times C^{r-h}(f^* F)$ et, lorsque f varie dans $C^r(X, Y)$, un atlas dont nous allons étudier les changements de cartes. Considérons les cartes canoniques de $C^{r-h}(X, TY)$ en $f_o = s_o \circ f$ et $g_o = s_o \circ g$; le changement de cartes est donné par l'application ω_h associée à l'application fibrée h d'un ouvert de $f_o^* TF = f^* F \oplus f^* F$ dans $g_o^* TF = g^* F \oplus g^* F$, image réciproque de l'application fibrée composée

$$\begin{array}{ccccccc}
X \times TF \supset X \times TU & \xrightarrow{X \times T\text{Exp}} & X \times TY \times TY & \xrightarrow{X \times \pi_2} & X \times TY & \xrightarrow{X \times g_0 \times TY} & X \times TY \times TY \supset X \times V \xrightarrow{X \times T\text{Exp}^{-1}} X \times TF \\
\downarrow X \times Tp & & \downarrow X \times \pi_1 & & \downarrow & & \downarrow X \times \pi_1 & & \downarrow X \times Tp \\
X \times TY & \xlongequal{\quad} & X \times TY & \xrightarrow{\quad} & X & \xrightarrow{X \times g_0} & X \times TY & \xlongequal{\quad} & X \times TY
\end{array}$$

Si l'on se place en coordonnées locales sur F , on a $\text{Exp}(y,v) = (y, e(y,v))$ et $\text{Exp}^{-1}(y,y') = (y, e(y,y'))$; l'application h a alors l'expression suivante

$$h(x,v,V) = (x, e(g(x), e(f(x), v))) \cdot d_2 e(f(x), v) \cdot V,$$

d'où il résulte que h est la somme de l'application k d'un ouvert U de f^*F dans g^*F , d'expression locale $k(x,v) = (x, e(f(x), e(f(x), v)))$ et de l'application $\widetilde{d_\phi k}$ de $U \times f^*F$ dans g^*F . Le changement de cartes pour le produit fibré a donc la forme suivante

$$C^r(f^*U) \times C^{r-h}(f^*F) \longrightarrow C^r(g^*U) \times C^{r-h}(g^*F) \quad (s, \sigma) \rightsquigarrow (\omega_k(s), \omega_{\widetilde{d_\phi k}}(s, \sigma));$$

or ω_k est le changement de cartes pour $C^r(X,Y)$ et, sachant que ω_k est de classe D^r , un calcul élémentaire montre que

$$\delta_h^1 \omega_k(s) \cdot \sigma = \omega_{\widetilde{d_\phi k}}(s, \sigma),$$

ce qui permet d'identifier l'atlas du produit fibré à l'atlas de l'espace tangent $T_h C^r(X,Y) \square$

Remarque 3.9. - Le théorème 3.8 permet d'identifier la chaîne tangente en un point f de $C^r(X,Y)$ avec la chaîne $C_*^{r-1}(f^*TY) = \{C^k(f^*TY)\}_{k=0}^{r-1}$ des sections du fibré image réciproque de TY par f , ou, ce qui est équivalent, avec la chaîne $C_*^{r-1}(X, TY)_f = \{C^k(X, TY)_f\}_{k=0}^{r-1}$ des relèvements $\bar{f}$ de f à TY :

$$\begin{array}{ccc}
& & TY \\
& \nearrow \bar{f} & \downarrow \tau_Y \\
X & \xrightarrow{f} & Y
\end{array}$$

Les applications tangentes des applications rencontrées dans ce paragraphe s'expriment alors simplement :

3.9.1.- Si f est une application de classe D^1 d'une variété banachique V dans $C^r(X,Y)$, l'application $\tilde{f}$ de $X \times V$ dans Y est partiellement continûment différentiable en la seconde variable et, pour z fixé dans V , on a :

$$\delta_h f(z) : (TV)_z \rightarrow C^{r-h}(X, TY)_{f(z)} \quad \bar{z} \rightsquigarrow \{x \rightsquigarrow d_2 \tilde{f}(x, z) \cdot \bar{z}\} .$$

3.9.2.- L'application d'évaluation est de classe D^r , et, en un point (x, f) de $X \times C^r(X, Y)$, on a :

$$\delta_h \text{ev}(x, f) : (TX)_x \times C^{r-h}(X, TY)_f \rightarrow (TY)_{f(x)} \quad (\bar{x}, \bar{f}) \rightsquigarrow df(x) \cdot \bar{x} + \bar{f}(x) .$$

3.9.3.- L'application de composition γ est de classe D^r , et, en un point (f, g) de $C^r(X, Y) \times C^r(Y, Z)$, on a :

$$\delta_h \gamma(f, g) : C^{r-h}(X, TY)_f \times C^{r-h}(Y, TZ)_g \rightarrow C^{r-h}(X, TZ)_{g \circ f} \quad (\bar{f}, \bar{g}) \rightsquigarrow Tg \bar{f} + \bar{g} \circ f .$$

3.9.4.- L'application ω_g de $C^r(X, Y)$ dans $C^r(X, Z)$ induite par une application g de classe C^r de Y dans Z est de classe D^r , et, en un point f de $C^r(X, Y)$, on a :

$$\delta_h \omega_g(f) : C^{r-h}(X, TY)_f \rightarrow C^{r-h}(X, TZ)_{g \circ f} \quad \bar{f} \rightsquigarrow Tg \bar{f} .$$

§ 4 - GROUPE DES DIFFÉOMORPHISMES D'UNE VARIÉTÉ COMPACTE.

Soit X une variété compacte de classe C^r , avec $r \geq 1$; d'après le corollaire 2.6, la variété X admet une application exponentielle et $C^r(X, X)$ est donc une variété de classe D^r . Le groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X , qui est un ouvert de $C^r(X, X)$ [10], sera muni de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $C^r(X, X)$.

Théorème 4.1.- Soit X une variété compacte de classe C^r . La variété $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X est un groupe dans la catégorie des variétés de classe D^r .

Le théorème 3.4 entraîne que l'application de composition

$$\gamma : \text{Aut}^r(X) \times \text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Aut}^r(X) \quad (f, g) \rightsquigarrow gof$$

est une application de classe D^r ; il reste à étudier l'application de prise de l'inverse

$$\iota : \text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Aut}^r(X) \quad f \rightsquigarrow f^{-1}.$$

Nous allons montrer successivement que ι est continue, puis que ι est de classe D^1 , enfin que ι est de classe D^r . La démonstration des deux premiers points repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.2.- Soit f une application continue d'un ouvert d'un espace de Banach dans $\text{Aut}^r(X)$ et soit $g = \iota \circ f$. Si $\tilde{f}$ est P fois partiellement continûment différentiable et si P est tel que (α, β) élément de P , $\alpha' + \beta' \leq \alpha + \beta$ et $\beta' \leq \beta$ entraînent (α', β') élément de P , alors $\tilde{g}$ est P fois partiellement continûment différentiable.

L'application $\tilde{g}$ vérifie l'identité $\tilde{f}(\tilde{g}(x, y), y) = x$. Soient x_0

et y_0 fixés et $x'_0 = \tilde{g}(x_0, y_0)$; l'application f étant continue et r étant supérieur ou égal à 1, $d_1 \tilde{f}$ existe et l'on a $d_1 \tilde{f}(x'_0, y_0) = df_{y_0}(x'_0)$ qui est inversible. Nous pouvons donc appliquer le théorème des fonctions implicites au point (x'_0, x_0, y_0) ; les propriétés de différentiabilité de $\tilde{g}$ en résultent.

Pour montrer que ι est continue, nous nous plaçons en coordonnées locales : soient (F, U, Exp) une application exponentielle sur X , ξ un point de $\text{Aut}^r(X)$ et $(C_*^r(\xi^*F), C^r(\xi^*U), \phi)$ la carte locale canonique de $\text{Aut}^r(X)$ au point ξ associée à cette application exponentielle ; nous considérons l'application composée

$$C^r(\xi^*U) \xrightarrow{\phi} \text{Aut}^r(X) \xrightarrow{\iota} \text{Aut}^r(X) .$$

L'application ϕ étant de classe D^r relativement à la chaîne $C_*^r(\xi^*F)$ est a fortiori de classe D^r relativement à l'espace de Banach $C^r(\xi^*U)$ et l'application

$$\tilde{\phi} : X \times C^r(\xi^*U) \rightarrow X$$

est donc de classe C^r . Le lemme 4.2 entraîne alors que $\widetilde{\iota \circ \phi}$ est de classe C^r , ce qui implique que $\iota \circ \phi$ est de classe D^r relativement à l'espace de Banach $C^r(\xi^*U)$, donc a fortiori continue. L'application ϕ étant une carte locale, il en résulte que ι est continue.

Soient maintenant $\eta = \iota(\xi) = \xi^{-1}$ et $(C_*^r(\eta^*F), C^r(\eta^*U), \psi)$ la carte locale canonique de $\text{Aut}^r(X)$ au point η ; nous noterons ι_ξ l'application induite par ι d'un ouvert de $C^r(\xi^*U)$ dans $C^r(\eta^*U)$. D'après la remarque 1.6.4., l'application continue ι_ξ est de classe D^1 relativement aux chaînes $C_*^r(\xi^*F)$ et $C_*^r(\eta^*F)$ si et seulement si, quel que soit $k < r$ et quelle que soit l'application f d'un ouvert d'un espace de Banach dans $C^r(\xi^*F)$, de classe D^1 relativement à la chaîne $\{C^r(\xi^*F), C^k(\xi^*F)\}$, l'application composée

$\iota_{\xi} \circ f$ est de classe D^1 relativement à la chaîne $\{C^r(\eta^*F), C^k(\eta^*F)\}$. Soit $P_k = \{(\alpha, 0) | \alpha \leq r\} \cup \{(\alpha, 1) | \alpha \leq k\}$; la condition pour que ι_{ξ} soit de classe D^1 s'exprime alors de la manière suivante : quel que soit $k < r$ et quelle que soit l'application f telle que $\tilde{f}$ soit P_k fois partiellement continûment différentiable, l'application $\tilde{g} = \iota_{\xi} \circ f$ est telle que g soit P_k fois partiellement continûment différentiable, ce qui est une conséquence directe du lemme 4.2.

Considérons enfin l'application

$$\Gamma : \text{Aut}^r(X) \times \text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Aut}^r(X) \times \text{Aut}^r(X) \quad (f, g) \rightsquigarrow (f, \gamma(f, g)) = (f, g \circ f).$$

Cette application est de classe D^r et elle admet une application inverse

$$\Gamma^{-1} : \text{Aut}^r(X) \times \text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Aut}^r(X) \times \text{Aut}^r(X) \quad (f, g) \rightsquigarrow (f, \gamma(\iota f, g)) = (f, g \circ f^{-1})$$

qui est de classe D^1 puisque ι est de classe D^1 . Par ailleurs, la relation $\iota \circ f = \pi_2 \circ \Gamma^{-1} \circ (f \times 1_X)$, où π_2 est la projection sur le second facteur, montre que ι est de même classe que Γ^{-1} ; le lemme suivant entraîne donc que ι est de classe D^r :

Lemme 4.3. — Une application de classe D^r qui est un difféomorphisme de classe D^1 est un difféomorphisme de classe D^r .

Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ et $\{F_k\}_{k=0}^r$ deux objets de $\underline{C}_r$, U un ouvert de E_0 , V un ouvert de F_0 et f un homéomorphisme de U sur V ; on notera g l'application inverse de f . On suppose que f est de classe D^r et que g est de classe D^1 ; nous allons montrer que g est de classe D^r par application de la condition nécessaire et suffisante du théorème 5.6.

Etant donné, pour $1 \leq \alpha \leq r$ et $1 \leq k \leq r - \alpha + 1$, des applications continues et localement bornées a_k^α de V dans $L^\alpha(F_k; E_{k+\alpha-1})$, on définit des applications continues et localement bornées A_k^α de V dans $L^\alpha(E_k; E_{k+\alpha-1})$ par

$$A_k^\alpha(y) = \sum_{t=1}^{\alpha} \frac{1}{t!} a_{k+t-1}^t(y) \cdot \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_t = \alpha} \frac{\alpha!}{\alpha_1! \dots \alpha_t!} \prod_{\ell=1}^t \delta_{k+\alpha-\alpha_\ell}^{\alpha_\ell} f(g(y)) \cdot (i_{k+\alpha-\alpha_\ell}^{-t+1, k})^{\alpha_\ell}$$

ce que nous écrirons encore sous la forme

$$A_k^\alpha(y) = a_k^\alpha(y) \cdot [\delta_k^1 f(g(y))]^\alpha - B_k^\alpha(y) \quad .$$

Si l'on pose $a_k^1 = \delta_k^1 g$, on a

$$A_k^1(y) = \delta_k^1 g(y) \cdot \delta_k^1 f(g(y))$$

qui est l'identité de E_k puisque $\delta_k^1 g(y)$ et $\delta_k^1 f(g(y))$ sont des applications linéaires inverses l'une de l'autre. On peut maintenant déterminer de proche en proche les applications a_k^α pour que $A_k^\alpha = 0$ dès que α est supérieur à 1 : si l'on suppose connues les $a_{k'}^{\alpha'}$ pour tout $\alpha' < \alpha$ et tout $k' \leq r - \alpha' + 1$, l'application $B_k^\alpha(y)$ est entièrement déterminée et l'on peut poser

$$a_k^\alpha(y) = B_k^\alpha(y) \cdot [\delta_k^1 g(y)]^\alpha \quad ;$$

le corollaire 1.3.10 assure que B_k^α , puis a_k^α , sont continues et localement bornées si les $a_{k'}^{\alpha'}$ le sont. Enfin, si pour tout $\alpha' < \alpha$, $a_{k'}^{\alpha'}(y)$ est un prolongement de $a_1^{\alpha'}(y)$, il en résulte que $B_k^\alpha(y)$ est un prolongement de $B_1^\alpha(y)$ et donc que $a_k^\alpha(y)$ est un prolongement de $a_1^\alpha(y)$; cette propriété qui est vérifiée pour $\alpha = 1$ est donc toujours vérifiée.

Soit V le voisinage de $V \times \{0\}$ dans $V \times F_0$ défini par les conditions suivantes : si (y, Y) appartient à V , $y + [0, 1]Y$ est contenu dans V et, en posant $x = g(y)$ et $x+X = g(y+Y)$, $x + [0, 1]X$ est contenu dans U . Soient t tel que $1 \leq t \leq r$ et (y, Y) un point de V . On considère le "polynôme de Taylor"

$$\sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} a_{t-\alpha+1}^\alpha(y) \cdot (j_{t-\alpha+1}^Y)^\alpha$$

où l'on remplace $j_k^Y = j_k f(x+X) - j_k f(x)$ par la formule de Taylor à l'ordre k

pour f :

$$j_k Y = \sum_{\beta=1}^k \frac{1}{\beta!} \delta_{k-\beta+1}^\beta f(x) \cdot (i_{k-\beta+1} X)^\beta + \epsilon^k(x, X) \cdot (i_1 X)^k$$

avec $x = g(y)$ et $X = g(y+Y) - g(y)$. En développant suivant la méthode de la démonstration du théorème 1.5.7 on met en évidence

1. Une partie régulière

$$\sum_{\beta=1}^t \frac{1}{\beta!} A_{t-\beta+1}^\beta(y) \cdot (i_{t-\beta+1} X) = i_t X = i_t g(y+Y) - i_t g(y) .$$

2. Une partie non régulière que l'on ramène à la forme

$$e^t(y, Y) \cdot (i_1 X)^t$$

où e^t est une application continue et localement bornée à valeurs dans $L^t(E_1; E_t)$, nulle si $Y = 0$. L'application g étant de classe D^1 , on a

$$i_1 X = i_1 g(y+Y) - i_1 g(y) = \left[\int_0^1 \delta_1^1 g(y+\tau Y) d\tau \right] \cdot j_1 Y = \rho(y, Y) \cdot j_1 Y$$

où ρ est une application continue et localement bornée à valeurs dans $L(E_1; E_1)$. La partie non régulière s'écrit donc

$$e^t(y, Y) \cdot [\rho(y, Y)]^t \cdot [j_1 Y]^t = \mathcal{E}^t(y, Y) \cdot (j_1 Y)^t$$

où $\mathcal{E}^t = e^t \cdot [\rho]^t$ est une application continue et localement bornée à valeurs dans $L^t(E_1; E_t)$, nulle si $Y = 0$.

Il résulte de cette étude que l'on a pour tout (y, Y) de V et tout $t \leq r$ l'identité

$$i_t g(y+Y) - i_t g(y) = \sum_{\alpha=1}^t \frac{1}{\alpha!} a_{t-\alpha+1}^\alpha(y) \cdot (j_{t-\alpha+1} Y)^\alpha - \mathcal{E}^t(y, Y) \cdot (j_1 Y)^t ,$$

C'est-à-dire une formule de Taylor à l'ordre t pour g , et cette application est donc de classe D^r $\square$

Remarque 4.4. - En reprenant les notations de la remarque 3.9, nous pouvons exprimer l'application linéaire tangente de ι : l'application

$$\text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Aut}^r(X) \quad f \mapsto \gamma(f, \iota f) = f^{-1} \circ f = 1_X$$

étant constante, on a

$$\delta_h \gamma(f, \iota f) \cdot [1 \times \delta_h \iota(f)] = 0$$

soit, en appliquant en un point $\bar{f}$ de $C^{r-h}(X, TX)_f$

$$Tf^{-1} \circ \bar{f} + [\delta_h \iota(f).g] \circ f = 0 ;$$

on a donc

$$\delta_h \iota(f) : C^{r-h}(X, TY)_f \rightarrow C^{r-h}(X, TX)_{\bar{f}^{-1}} \quad \bar{f} \mapsto - Tf^{-1} \circ \bar{f} \circ f^{-1} .$$

L'action d'un groupe de Lie G sur une variété compacte X a une expression simple relativement au groupe $\text{Aut}^r(X)$:

Théorème 4.5. - Soient G un groupe banachique de classe C^r et X une variété compacte de classe C^r . Il y a correspondance biunivoque entre les actions de classe C^r de G sur X et les morphismes de groupes de G dans $\text{Aut}^r(X)$ qui sont des applications de classe D^r .

Soit $\Phi : G \times X \rightarrow X$ une action de classe C^r . Il résulte de 3.1 qu'à Φ correspond une application ϕ de classe D^r de G dans $C^r(X, X)$; comme Φ définit une action, $\phi(g) = \Phi(g, \cdot)$ est un difféomorphisme de classe C^r de X et l'on a

$$\phi(g_1 g_2) = \Phi(g_1 g_2, \cdot) = \Phi(g_1, \Phi(g_2, \cdot)) = \phi(g_1) \circ \phi(g_2)$$

ce qui démontre que ϕ se factorise par la sous-variété ouverte $\text{Aut}^r(X)$ et que ϕ est un morphisme de groupes.

Réciproquement, soit ϕ un morphisme de classe D^r de G dans

dans $\text{Aut}^r(X)$. L'application d'évaluation étant de classe D^r , l'application composée

$$\Phi = \tilde{\phi} : G \times X \xrightarrow{\phi \times 1_X} \text{Aut}^r(X) \times X \xrightarrow{\text{ev}} X$$

est de classe C^r et elle définit une action de G sur X $\square$

Définition 4.6. - Nous dirons qu'une action Φ de G sur X est localement effective si le sous-groupe des éléments de G qui opère identiquement sur X est discret.

Théorème 4.7. - Soit G un groupe de Lie de classe C^r , X une variété compacte de classe C^r et ϕ un morphisme de classe D^r de G dans $\text{Aut}^r(X)$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i- L'application ϕ est une immersion.
- ii- L'action ϕ de G sur X définie par ϕ est localement effective et G est de dimension finie.

Si ϕ est une immersion, il existe un voisinage U de l'élément neutre e de G tel que $\phi|_U$ soit une injection ; il en résulte que $U \cap \text{Ker}(\phi) = \{e\}$, donc que $\text{Ker}(\phi)$ est discret, c'est-à-dire que Φ est localement effective. D'autre part, $\delta_r \phi(e)$ identifie $(\text{TG})_e$ à un facteur direct de $C^0(\text{TX})$ et cette application linéaire transforme une partie bornée de $(\text{TG})_e$ en une partie 0-équicontinue de $C^0(\text{TX})$, c'est-à-dire, d'après le théorème d'Ascoli, la variété X étant de dimension finie, une partie relativement compacte ; il en résulte que $(\text{TG})_e$ est localement compact, donc de dimension finie.

Réciproquement, si Φ est une action localement effective, l'application ϕ est localement injective. Nous allons montrer que d'une manière générale un morphisme localement injectif de classe D^r d'un groupe de Lie G de

dimension finie dans un groupe H de classe D^r est une immersion, c'est-à-dire localement un difféomorphisme sur une sous-variété.

Plaçons nous en un point g_0 de G et choisissons une carte locale (U, u, E) de G au point g_0 et une carte locale $(V, v, \{F_k\}_{k=0}^r)$ de H au point $\phi(g_0)$. L'application linéaire tangente $\delta_1 \phi(g_0)$ est injective : si ce n'était pas le cas, il existerait un vecteur tangent non nul $\bar{g}_0$ tel que $\delta_1 \phi(g_0) \cdot \bar{g}_0 = 0$ et, par translation sur G , il existerait un champ continu de vecteurs tangents non nuls $\bar{g}$ tel que $\delta_1 \phi(g) \cdot \bar{g} = 0$ quel que soit g ; l'application ϕ serait alors constante le long des courbes intégrales de ce champ (qui existent d'après le théorème de Cauchy-Arzela-Péano), ce qui est contraire à l'hypothèse d'injectivité locale de ϕ . L'espace E étant de dimension finie, l'application injective $\delta_r \phi(g_0)$ de E dans E_r admet un inverse à gauche v_r et toute application linéaire continue u de E dans E_r assez voisine de $\delta_r \phi(g_0)$ admet un inverse à gauche de la forme $w_r = (v_r \circ u)^{-1} \circ v_r$ (cf. lemme III.0.3) tel que $w_r \circ \delta_r \phi(g_0) = (v_r \circ u)^{-1}$ soit inversible; l'espace $L(E; F_0)$ étant dense dans $L(E; F_r)$ (parce que E est de dimension finie), nous pouvons donc choisir une application linéaire continue u_0 de E dans F_0 et un inverse à gauche w_r de $u_r = j_r \circ u_0$ tel que $w_r \circ \delta_r \phi(g_0)$ soit inversible. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 E & \xrightarrow{u_0} & F_0 & \xrightarrow{w_0 = w_r \circ j_r} & E \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 E & \xrightarrow{u_1 = j_1 \circ u_0} & F_1 & \xrightarrow{w_1 = w_r \circ j_{r,1}} & E \\
 \parallel & & & & \parallel \\
 \vdots & & & & \vdots \\
 E & \xrightarrow{u_r = j_r \circ u_0} & F_r & \xrightarrow{w_r} & E
 \end{array}$$

où le composé de deux flèches horizontales est l'identité de E , d'où une décomposition de la chaîne $\{F_k\}_{k=0}^r$ en la somme directe de la chaîne constante

E et de la chaîne $\{F'_k\}_{k=0}^r$ définie par $F'_k = \text{Ker}(w_k)$. Relativement à cette décomposition, l'application ϕ a la forme suivante

$$E \supset \Omega \rightarrow E \times F'_0 \quad x \mapsto (w_0 \circ \phi(x), \phi'(x))$$

où $w_0 \circ \phi = w_r \circ (j_r \circ \phi)$ est une application de classe C^r de E dans lui-même telle que $d[w_0 \circ \phi](g_0) = w_r \circ \delta_r \phi(g_0)$ soit inversible. L'application $w_0 \circ \phi$ est donc un difféomorphisme local ; soit ψ le difféomorphisme inverse. On construit alors un difféomorphisme local h de classe D^r de $E \oplus \{F'_k\}_{k=0}^r$ sur lui-même par

$$h(x, y) = (\psi(x), y - \phi' \circ \psi(x))$$

qui définit un changement de cartes de H au point $\phi(g_0)$; relativement à la nouvelle carte, l'application ϕ s'identifie à l'inclusion canonique de E dans $E \oplus \{F'_k\}_{k=0}^r$, ce qui démontre que ϕ est au voisinage de g_0 un difféomorphisme sur une sous-variété de H $\square$

Corollaire 4.8.- Soient G un groupe de Lie compact, X une variété compacte de classe C^r et ϕ un morphisme de classe D^r de G dans $\text{Aut}^r(X)$. L'action ϕ de G sur X définie par ϕ est effective si et seulement si ϕ est un plongement.

Cela résulte du théorème 4.7. et de ce qu'une immersion injective de source une variété compacte est un plongement $\square$

CHAPITRE 111

§ 0 - VOISINAGES TUBULAIRES.

Définition 0.1. - Soit X une sous-variété de classe C^r d'une variété Y . Pour $s \leq r$, un voisinage tubulaire de classe C^s de X dans Y est un triple (E, D, ξ) où E est un espace fibré vectoriel de classe C^s de base X , D un voisinage ouvert de la section nulle de E et ξ un difféomorphisme de classe C^s de D sur un voisinage ouvert de X dans Y , dont la restriction à la section nulle s'identifie au plongement canonique de X dans Y .

Le théorème classique d'existence d'un voisinage tubulaire [8] exprime que si Y est une variété de classe C^r admettant une application exponentielle et si r est supérieur ou égal à 2, toute sous-variété paracompacte de classe C^r de Y admet un voisinage tubulaire de classe C^{r-1} . Si l'on se restreint aux sous-variétés de dimension finie, on peut démontrer le résultat plus fort suivant :

Théorème 0.2. - Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Si r est supérieur ou égal à 1, toute sous-variété de classe C^r de Y , paracompacte et de dimension finie, admet un voisinage tubulaire de classe C^r .

Soit X une sous-variété de classe C^r de Y , paracompacte et de dimension finie et soit f le plongement canonique de X dans Y . Etant donné une application exponentielle $(F, U, \exp)$ sur Y , nous noterons $E = f^*F$ l'espace fibré vectoriel de classe C^r , de base X , image réciproque de F par f et $\exp_f$ l'application composée suivante

$$E = f^*F \longrightarrow F \supset U \xrightarrow{\text{Exp}} Y \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$$

définie sur un voisinage de la section nulle de E .

Soit V une carte locale de Y au point $f(x)$, $V \times F$ la carte locale associée du fibré tangent TY , $U \times F$ une carte locale de E au point x telle que $f(U)$ soit contenu dans V et $U \times F \times E \times F$ la carte locale associée de TE . Relativement à ces cartes, l'application $\exp_f$ et son application tangente s'écrivent

$$(x, v) \rightsquigarrow e(x, v)$$

$$(x, v, \bar{x}, \bar{v}) \rightsquigarrow [e(x, v), d_1 e(x, v) \cdot \bar{x} + d_2 e(x, v) \cdot \bar{v}]$$

et l'on sait que $d_2 e(x, v)$ est un automorphisme de F et que $df(x) = d_1 e(x, 0)$ est une injection admettant un inverse à gauche. Le noyau de l'application linéaire tangente $d_1 e(x, 0)$ est l'ensemble des vecteurs de la forme

$$(-\bar{x}, d_2 e(x, 0)^{-1} \circ d_1 e(x, 0) \cdot \bar{x})$$

où l'application $\varepsilon(x) = d_2 e(x, 0)^{-1} \circ d_1 e(x, 0)$ est une injection de E dans F admettant un inverse à gauche. Soient

$$U \times F \times E \times F \rightarrow U' \times F' \times E' \times F' \quad (x, v, \bar{x}, \bar{v}) \rightsquigarrow (h(x), A(x) \cdot v, dh(x) \cdot \bar{x}, dA(x) \cdot (\bar{x}, v) + A(x) \cdot \bar{v})$$

$$V \times F \rightarrow V' \times F' \quad (y, \bar{y}) \rightsquigarrow (k(y), dk(y) \cdot \bar{y})$$

des changements de cartes pour TE et TY ; si l'on note e' le représentant de $\exp_f$ relativement aux nouvelles cartes, on a les relations

$$d_1 e'(h(x), 0) \circ dh(x) \cdot \bar{x} = dk(e(x, 0)) \circ d_1 e(x, 0) \cdot \bar{x}$$

$$d_2 e'(h(x), 0) \circ A(x) \cdot \bar{v} = dk(e(x, 0)) \circ d_2 e(x, 0) \cdot \bar{v}$$

et, $dk(e(x, 0))$ étant un isomorphisme, il en résulte que

$$\varepsilon(x) = d_2 e(x, 0)^{-1} \circ d_1 e(x, 0) = A(x)^{-1} \circ d_2 e'(h(x), 0)^{-1} \circ d_1 e'(h(x), 0) \circ dh(x)$$

soit encore

$$A(x) \circ \varepsilon(x) = \varepsilon'(h(x)) \circ dh(x) ,$$

ce qui démontre que les applications $\varepsilon(x)$ définissent un morphisme d'espaces fibrés vectoriels ε , de classe C^{r-1} , de TX dans E , au-dessus de l'identité de X .

Si F' est un supplémentaire de l'image de $\varepsilon(x)$ dans F , le sous-espace $E \times F'$ de $E \times F$ est un supplémentaire du noyau de $de(x,0)$ et la restriction de $de(x,0)$ à $E \times F'$ est donc un automorphisme. Si E' est un sous-fibré de classe C^r de E tel que pour tout x de X la fibre E'_x soit un supplémentaire de l'image de ε_x dans E_x , la restriction de $\exp_f$ à E' sera donc une application de classe C^r et un difféomorphisme local en tout point de la section nulle ; on en déduira alors par la méthode classique un voisinage tubulaire de classe C^r pour X . L'existence de E' résulte des lemmes suivants et de ce que la variété abstraite X admet des partitions de l'unité et peut être munie d'une super-structure de variété de classe C^{r+1} .

Lemme 0.3.- Soient E et F deux espaces de Banach et u_0 une application linéaire continue de E dans F admettant un inverse à gauche. Il existe alors un voisinage V de u_0 dans $L(E;F)$ et une application de classe C^∞ de V dans $L(F;E)$ associant à tout point u de V un inverse à gauche $u^\#$.

Soit v_0 un inverse à gauche de u_0 . L'application

$$L(E;F) \rightarrow L(E;E) \quad u \rightsquigarrow v_0 \circ u$$

est continue et $v_0 \circ u_0 = 1_E$. L'ensemble des automorphismes de E étant un ouvert de $L(E;E)$, il existe un voisinage V de u_0 tel que $v_0 \circ u$ soit un automorphisme quel que soit u élément de V . On pose alors

$$u^\# = (v_0 \circ u)^{-1} \circ v_0 \quad \square$$

Lemme 0.4.- Soient E et F deux espaces fibrés vectoriels de classe C^r , de base une variété B admettant des partitions de l'unité. Si s est une section continue du fibré $L(E;F)$ telle que, quel que soit le point x de B l'application linéaire continue $s(x)$ admette un inverse à gauche, il existe un voisinage V de $s(B)$ dans $L(E;F)$ et une application fibrée $\#$, de classe C^r , de V dans $L(F;E)$ tels que, pour tout point x de B , quels que soient u_1 et u_2 dans V_x , on ait $\text{Im}(u_1)$ et $\text{Ker}(u_2^\#)$ supplémentaires dans F_x .

Soit x un point de B . On choisit une carte locale $U \times E$ de E et une carte locale $U \times F$ de F au point x ; à ces cartes sont associées une carte $U \times L(E;F)$ de $L(E;F)$ et une carte $U \times L(F;E)$ de $L(F;E)$; enfin, la section s définit une application s_U de U dans $L(E;F)$. Il existe d'après le lemme 0.3 un voisinage V de $s_U(x)$ dans $L(E;F)$ et une application $\#$ de V dans $L(F;E)$ associant un inverse à gauche à tout élément de V . On peut alors restreindre U de manière à ce que $s_U(U)$ soit contenu dans V et considérer l'application fibrée

$$\begin{array}{ccc} L(E;F)|_U \supset V_U & \xrightarrow{\#_U} & L(F;E)|_U \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ U \times L(E;F) \supset U \times V & \xrightarrow{1_U \times \#} & U \times L(F;E) \end{array}$$

où V_U est un voisinage de $s(U)$ dans $L(E;F)|_U$. On peut ainsi trouver un recouvrement ouvert localement fini $\{U_i\}_{i \in I}$ de B et pour tout indice i un voisinage V_i de $s(U_i)$ dans $L(E;F)|_{U_i}$ ainsi qu'une application fibrée $\#_i$ de V_i dans $L(F;E)|_{U_i}$ associant un inverse à gauche à tout élément de V_i . Soient maintenant $\{U_i^!\}_{i \in I}$ un recouvrement ouvert tel que $\bar{U}_i^! \subset U_i$ et I_x l'ensemble des indices tels que x appartienne à $\bar{U}_i^!$. On pose $V_x = \bigcap_{i \in I_x} (V_i)_x$ et $V = \bigcup_{x \in B} V_x$: cette partie de E est un voisinage de $s(B)$. Si $\{f_i\}_{i \in I}$

est une partition de l'unité de classe C^r subordonnée au recouvrement $\{U_i^1\}_{i \in I}$ on définit une application fibrée de classe C^r de V dans $L(F;E)$ par

$$V_x \rightarrow L(F;E)_x \quad u \rightsquigarrow u^\# = \sum_{i \in I_x} f_i(x) u^{\#_i}$$

et cette application associe à tout élément u de V un inverse à gauche puisque l'ensemble des inverses à gauche de u est convexe.

Considérons maintenant l'application composée

$$\begin{aligned} V \times V &\xrightarrow{B} L(E;F) \times L(F;E) \rightarrow L(E;E) \\ (u_1, u_2) &\rightsquigarrow (u_1, u_2^\#) \rightsquigarrow u_2^\# \circ u_1 \end{aligned}$$

La section $s \times s$ de $V \times V$ est envoyée sur la section identité de $L(E;E)$: on peut donc restreindre V de telle manière que $V \times V$ soit envoyé dans le sous-fibré des automorphismes de E , qui est ouvert dans $L(E;E)$. Dans ce cas, quels que soient u_1 et u_2 dans V_x , $u_2^\# \circ u_1$ est un automorphisme et $(u_2^\# \circ u_1)^{-1} \circ u_2^\#$ est un inverse à gauche de u_1 ; les sous-espaces $\text{Im}(u_1)$ et $\text{Ker}(u_2^\#) = \text{Ker}[(u_2^\# \circ u_1)^{-1} \circ u_2^\#]$ sont donc supplémentaires dans F_x $\square$

Lemme 0.5.- Soient E et F deux espaces fibrés vectoriels de classe C^r , de base une variété B admettant des partitions de l'unité. Quel que soit le plongement continu f du fibré E dans le fibré F , il existe un sous-espace fibré vectoriel F' de F , de classe C^r , supplémentaire du sous-espace fibré vectoriel de classe C^0 image de f .

Soit s la section continue de $L(E;F)$ représentant f , V le voisinage de $s(B)$ et $\#$ l'application fibrée construits au lemme 0.4. La base B admettant des partitions de l'unité, il existe une section $\bar{s}$ de $L(E;F)$, de classe C^r , prenant ses valeurs dans V ; l'application composée $\# \circ \bar{s}$ est alors une section de classe C^r de $L(F;E)$ qui définit un morphisme g de classe C^r du fibré F dans le fibré E tel que la suite

$$F \xrightarrow{g} E \longrightarrow 0$$

soit exacte. On pose $F' = \text{Ker}(g)$ $\square$

Ce lemme s'applique à la démonstration du théorème 0.2 de la manière suivante : si l'on choisit une super-structure $\bar{X}$ de classe C^{r+1} de X , le morphisme ϵ de TX dans E définit un morphisme $\bar{\epsilon}$ de $T\bar{X}$ dans E , ayant même image, et le lemme 0.4 entraîne que $\text{Im}(\epsilon) = \text{Im}(\bar{\epsilon})$ admet un sous-espace fibré supplémentaire de classe C^r $\square$

Corollaire 0.6.- Soit Y une variété de classe C^r , paracompacte et de dimension finie. Si r est supérieur ou égal à 1, toute sous-variété de classe C^r de Y admet un voisinage tubulaire de classe C^r .

On applique le théorème 0.2, la variété Y admettant une application exponentielle d'après le corollaire II.2.6 $\square$

En dehors des applications particulières pour lesquelles nous l'avons établi, le théorème d'existence des voisinages tubulaires de même classe que la sous-variété considérée permet de renforcer les conclusions de certains résultats classiques. Nous allons développer un exemple de ce type d'applications, qui nous sera indirectement utile par la suite. Il est bien connu [6] que si f est une submersion de classe C^1 et si f est propre (i.e. l'image réciproque d'un compact par f est un compact), alors f est une fibration localement triviale de classe C^0 . Nous sommes en mesure de montrer que cette fibration est de classe C^1 :

Théorème 0.7.- Soit X une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Si r est supérieur ou égal à 1, toute submersion propre de classe C^r de X dans une variété Y est une fibration localement

triviale de classe C^r .

Soient y_0 un point de Y , X_0 la sous-variété compacte de classe C^r de X image réciproque de y_0 par f , (E,D,ξ) un voisinage tubulaire de classe C^r de X_0 dans X et soit M la sous-variété de classe C^r de $D \times Y$ ensemble des points (v,y) tels que $y = f \circ \xi(v)$. L'application

$$D \times Y \xrightarrow{\pi_1} D \xrightarrow{\xi} X$$

restreinte à M est un difféomorphisme de classe C^r sur un voisinage ouvert de X_0 dans X et la restriction à M de la projection sur Y , qui s'identifie alors à l'application f , est une submersion propre.

Une carte locale de classe C^r de (X,f,Y) au point y_0 est équivalente à une application de classe C^r

$$\bar{\phi} : X_0 \times U \rightarrow D \times U \quad (x,y) \rightsquigarrow (\phi(x,y),y)$$

qui soit un difféomorphisme sur $M_U = M \cap D \times U$. L'existence de U et de $\bar{\phi}$ résulte du lemme suivant :

Lemme 0.8.- Soient (E,p,X) un espace fibré vectoriel de classe C^r de base compacte, Y une variété de classe C^r , q la projection de $E \times Y$ sur Y et M une sous-variété de classe C^r de $E \times Y$. Si la restriction de q à M est une submersion en un point y_0 de Y et si $M_0 = M \cap E \times \{y_0\}$ est l'image de X par une section différentiable s_0 de E , il existe un voisinage U de y_0 et une application $\bar{\phi}$ de classe C^r ,

$$\bar{\phi} : X \times U \rightarrow E \times U \quad (x,y) \rightsquigarrow (\phi(x,y),y) ,$$

qui soit un difféomorphisme sur $M_U = M \cap E \times U$.

Soient z un point de M et $x = p(z)$. Nous notons p_M la restriction à M de la projection $E \times Y \rightarrow E \xrightarrow{p} X$, q_M la restriction de q à M

et nous considérons la section s_0 comme une application de X dans M . La relation $p_M \circ s_0 = 1_X$ entraîne $dp_M(z) \cdot ds_0(x) = 1$; de même, $q_M \circ s_0 = y_0$ entraîne $dq_M(z) \cdot ds_0(x) = 0$; enfin, par hypothèse, $dq_M(z)$ admet un inverse à droite Q . En écrivant sous forme matricielle, il vient

$$\begin{bmatrix} d_{p_M}(z) \\ \dots\dots \\ d_{q_M}(z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} ds_0(x) & \vdots & Q \\ & \vdots & \\ & \vdots & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ I & \vdots & R \\ \dots\dots & \vdots & \dots\dots \\ 0 & \vdots & I \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne que $d[p_M \times q_M](z)$ est inversible : l'application $p_M \times q_M$ est donc un difféomorphisme local en tout point de la sous-variété compacte M_0 .

Il existe alors un voisinage U de y_0 dans Y tel que la restriction de $p_M \times q_M$ à $M_U = M \cap E \times U$ soit un difféomorphisme sur $X \times U$. Le difféomorphisme inverse définit le plongement $\bar{\phi}$ de $X \times U$ dans $E \times U$ $\square$

§ 1 - SOUS-VARIETES COMPACTES D'UNE VARIETE DIFFERENTIABLE.-

Théorème 1.1.- Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Il existe une structure de variété de classe D^r modélée sur des objets de $\underline{SC}^r$ sur l'ensemble $H^r(Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^r de Y .

Soit X un élément de $H^r(Y)$. D'après le théorème 0.2, la sous-variété X admet un voisinage tubulaire (E, D, ξ) de classe C^r dans Y . A toute section s de classe C^r de E , prenant ses valeurs dans D , on associe la sous-variété image de X par le plongement $s \circ \xi$. On définit ainsi une injection ϕ_ξ de l'ouvert $C^r(D)$ de l'espace de Banach $C^r(E)$ dans l'ensemble $H^r(Y)$, c'est-à-dire une carte locale de $H^r(Y)$ au point X .

Soient maintenant ϕ_{ξ_1} et ϕ_{ξ_2} deux cartes locales de ce type en des points X_1 et X_2 , construites à partir de voisinages tubulaires (E_1, D_1, ξ_1) et (E_2, D_2, ξ_2) . On considère l'application ξ_{21} de classe C^r d'un ouvert de E_1 dans E_2 , définie par

$$E_1 \supset D_1 \xrightarrow{\xi_1} Y \supset V_2 \xrightarrow{\xi_2^{-1}} E_2$$

(cette application ne respecte pas les fibrations). Si des sections s_1 de $C^r(D_1)$ et s_2 de $C^r(D_2)$ définissent la même sous-variété de Y , les plongements $\xi_{21} \circ s_1$ et s_2 ont même image dans E_2 ; il résulte alors du lemme suivant que le changement de cartes entre ϕ_{ξ_1} et ϕ_{ξ_2} est une application d'un ouvert de $C^r(D_1)$ dans $C^r(D_2)$, de classe D^r relativement aux chaînes $C_*^r(E_1)$ et $C_*^r(E_2)$.

Lemme 1.2.- Soient (E, p, X) et (F, q, Y) deux espaces fibrés vectoriels de classe C^r , avec $r \geq 1$, de base compacte et θ une application de classe C^r d'un ouvert Ω de E dans F . L'ensemble des sections de classe C^r de E prenant leurs valeurs dans Ω et telles que $\theta \circ s$ soit un

plongement identifiant X à une section $\hat{\theta}(s)$ de classe C^r de F est un
ouvert U de $C^r(E)$; l'application $\hat{\theta}$ de U dans $C^r(F)$ est de classe D^r
relativement aux chaînes $C_*^r(E)$ et $C_*^r(F)$.

Nous savons que l'ensemble $C^r(\Omega)$ des sections de classe C^r de E prenant leurs valeurs dans Ω est un ouvert de $C^r(E)$; un élément s de $C^r(\Omega)$ appartient à U si et seulement si l'application $q \circ \theta \circ s$ est un difféomorphisme de classe C^r de X sur Y et l'on a

$$\hat{\theta}(s) = \theta \circ s \circ [q\theta s]^{-1} .$$

L'application $q\theta$ étant de classe C^r , l'application

$$\omega_{q\theta} : C^r(\Omega) \rightarrow C^r(X,Y) \quad s \rightsquigarrow q\theta s$$

est continue et l'ensemble $\text{Isom}^r(X,Y)$ des difféomorphismes de classe C^r de X sur Y étant ouvert dans $C^r(X,Y)$ lorsque r est supérieur ou égal à 1 , son image réciproque U par $\omega_{q\theta}$ est un ouvert de $C^r(\Omega)$, donc de $C^r(E)$.

L'application $\hat{\theta}$ admet la factorisation suivante

$$Y \times U \xrightarrow{\overbrace{\text{inv} \circ \omega_{q\theta} \times 1_U}} X \times U \xrightarrow{\text{ev}} E \supset \Omega \xrightarrow{\theta} F .$$

L'application $\omega_{q\theta}$ étant de classe D^r (théorème II.3.5.) ainsi que l'application

$$\text{inv} : \text{Isom}^r(X,Y) \rightarrow \text{Isom}^r(Y,X) \quad f \rightsquigarrow f^{-1}$$

(cela résulte des théorèmes II.3.4 et II.4.1 et de ce que, si g est un élément de $\text{Isom}^r(Y,X)$, on a la factorisation suivante de inv :

$$\text{Isom}^r(X,Y) \xrightarrow{\gamma(\cdot, g)} \text{Aut}^r(X) \xrightarrow{1} \text{Aut}^r(X) \xrightarrow{\gamma(g, \cdot)} \text{Isom}^r(Y,X) \quad)$$

l'application $\overbrace{\text{inv} \circ \omega_{q\theta}}$ est de classe D^r (théorème II.1.14) ; l'application d'évaluation ev est également de classe D^r (théorème II.1.13) et enfin θ

qui est une application de classe C^r entre des variétés banachiques est aussi une application de classe D^r . L'application $\tilde{\theta}$ est donc de classe D^r et il résulte du théorème II.1.14 que $\hat{\theta}$ est de classe D^r .

Si l'on choisit pour tout élément X de $H(Y)$ un voisinage tubulaire (E_X, D_X, ξ_X) de classe C^r , la famille $\{\phi_{\xi_X}\}_{X \in H^r(Y)}$ de cartes locales constitue un atlas de classe D^r de $H^r(Y)$ et deux tels atlas sont équivalents $\square$

Théorème 1.3.- Soient Y et Z deux variétés de classe C^r admettant une application exponentielle et f une application de classe C^r de Y dans Z . L'ensemble $H^r(Y, f)$ des sous-variétés compactes X de classe C^r de Y telles que la restriction de f à X soit un plongement est un ouvert de $H^r(Y)$; l'application

$$f_* : H^r(Y, f) \rightarrow H^r(Z) \quad X \rightsquigarrow f(X)$$

est de classe D^r lorsque l'on munit $H^r(Y, f)$ de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $H^r(Y)$.

Soient X un élément de $H^r(Y, f)$, (E, D, ξ) un voisinage tubulaire de classe C^r de X dans Y et (E', D', ξ') un voisinage tubulaire de classe C^r de $f(X)$ dans Z . Les sections s de E , de classe C^r , prenant leurs valeurs dans D et telles que $\xi'^{-1} \circ f \circ \xi \circ s$ soit un plongement identifiant X à une section de classe C^r de E' définissent des éléments de $H^r(Y, f)$. Or l'ensemble U de ces sections contient la section nulle et est ouvert d'après le lemme 1.2. Il existe donc un voisinage de X dans $H^r(Y)$ formé d'éléments de $H^r(Y, f)$.

Si l'on pose $\theta = \xi'^{-1} \circ f \circ \xi$, l'application $\hat{\theta}$ de U dans $C^r(E')$ est le représentant de f_* relativement aux cartes locales définies par les voisinages tubulaires (E, D, ξ) et (E', D', ξ') et cette application est de classe D^r d'après le lemme 1.2 ; l'application f_* est donc de classe D^r $\square$

Théorème 1.4.- Soient Y et Z deux variétés de classe C^r admettant une application exponentielle et f une application fermée de classe C^r de Y dans Z . L'ensemble $H^r(f, Z)$ des sous-variétés compactes X de classe C^r de Z telles que f soit transversale sur X et que $f^{-1}(X)$ soit compact est un ouvert de $H^r(Z)$; l'application

$$f^* : H^r(f, Z) \rightarrow H^r(Y) \quad X \rightsquigarrow f^{-1}(X)$$

est de classe D^r lorsque l'on munit $H^r(f, Z)$ de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $H^r(Z)$.

Soit X un élément de $H^r(f, Z)$, (E, D, ξ) un voisinage tubulaire de classe C^r de X dans Z et (E', D', ξ') un voisinage tubulaire de classe C^r de $X' = f^{-1}(X)$ dans Y . L'application f induit une application ϕ de classe C^r d'un voisinage de la section nulle s'_0 de E' dans E , transversale sur la section nulle s_0 de E et telle que $s'_0(X')$ soit l'image réciproque de $s_0(X)$. On a le diagramme commutatif suivant de morphisme de fibrés

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & TX' & \xrightarrow{T_{s'_0}} & TE' \Big|_{X'} & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow T[\phi|X'] & & \downarrow T\phi & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & TX & \xrightarrow{T_{s_0}} & TE \Big|_X & \longrightarrow & E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où les lignes sont des suites exactes ; TX' étant le noyau du morphisme composé de $TE' \Big|_{X'}$, dans E , le morphisme de E' dans E induit par $T\phi$ identifie E' à l'image réciproque de E par l'application $\phi|X'$.

Soient x'_0 un point de X' , $V \times E$ une carte locale de E au point $\phi(x'_0)$, $V' \times E'$ une carte locale de E' au point x'_0 ; on choisit un voisinage U' de l'origine dans E' et l'on restreint éventuellement V' pour que ϕ soit définie sur $V' \times U'$ et que l'image de $V' \times U'$ par ϕ soit contenue dans la carte $V \times E$ de E . Relativement à ces cartes, l'application ϕ à l'expression suivante :

$$V' \times E \supset V' \times U' \rightarrow V \times E$$

$$(x', v) \rightsquigarrow (\phi_1(x', v), \phi_2(x', v))$$

et les conditions de transversalité de ϕ entraînent que $d_1\phi_2(x', 0) = 0$ et que $d_2\phi_2(x', 0)$ est un automorphisme ; on restreint encore U' pour que $d_2\phi_2(x', v)$ soit un automorphisme quelque soit (x', v) élément de $V' \times U'$: de cette manière, si s est une section de E , la restriction de ϕ à $V' \times U'$ sera transversale sur $s(V)$. Considérons l'application de classe D^r suivante :

$$\theta : C_*^r(E) \times V' \times U' \rightarrow E$$

$$(s, x', v) \rightsquigarrow \phi_2(x', v) - s \circ \phi_1(x', v) .$$

L'application θ ayant pour but une variété banachique est à fortiori de classe C^r et l'on a $\theta(0, x', 0) = 0$ et $d_3\theta(0, x', 0) = d_2\phi_2(x', 0)$ qui est un automorphisme de E ; d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage W de l'origine dans $C^r(E)$ et l'on peut restreindre V' et U' de telle manière que pour (s, x', v) appartenant à $W \times V' \times U'$, l'équation $\theta(s, x, v) = 0$ admette une unique solution $v = \sigma(s, x)$, et cette solution est de classe C^r par rapport à s et x .

La variété X' étant compacte, on peut la recouvrir par un nombre fini de voisinages du type V' et il existe alors un voisinage W de l'origine dans $C^r(E)$ et un voisinage U' de la section nulle de E' telle que pour toute section s élément de W il existe une unique section σ de classe C^r de E' prenant ses valeurs dans U' et telle que l'image de $\phi \circ \sigma$ soit contenue dans l'image de s ; il en résulte que la sous-variété $\xi' \circ \sigma(X')$ de Y est contenue dans l'image réciproque par f de la sous-variété $\xi \circ s(X)$ de Z . On aura égalité de $\xi' \circ \sigma(X')$ et de $f^{-1}(\xi \circ s(X))$ si $\xi \circ s(X)$ ne rencontre pas l'image de f en dehors de $f \circ \xi'(U')$. Par hypothèse, l'application f est fermée ; l'image par f de $Y - \xi'(U')$ est donc un fermé de Z . Ce fermé ne rencontrant pas le compact X , il existe un voisinage U de la section nulle de E tel que $\xi(U)$ ne rencontre pas $f(Y - \xi'(U'))$. Toute section s élément de $W \cap C^r(U)$ définit donc une sous-variété de Z sur laquelle f est transversale et dont l'image

réci-proque est une sous-variété de Y voisine de X' , définie par une section $\sigma = \phi^*(s)$ de E' . Il en résulte que $H^r(f, Z)$ est un ouvert de $H^r(Z)$.

Il reste à montrer que l'application f^* , dont ϕ^* est un représentant local, est une application de classe D^r . D'après le théorème II.1.14 il suffit pour cela que l'application $\widetilde{\phi^*}$ de $X' \times W$ dans E' soit de classe D^r relativement aux structures de variétés banachiques sur X' et E' et à la chaîne $C_*^r(E)$. Localement, cette application est la solution $v = \sigma(s, x)$ du problème de fonctions implicites défini par l'application θ de classe D^r . Le lemme suivant montre que cette solution est une application de classe D^r .

Lemme 1.5:- Soient $\{E_k\}_{k=0}^r$ un objet de $\underline{C}_r$, F un espace de Banach Ω un ouvert de $E_0 \times F$ et f une application de Ω dans F , de classe D^r relativement à la chaîne produit $\{E_k\}_{k=0}^r \times F$. Si $f(a, b) = c$ et si $d_2 f(a, b)$ est un automorphisme de F , il existe des voisinages U de a dans E_0 , V de b et W de c dans F et une application ϕ de $U \times W$ dans V , de classe D^r relativement à la chaîne produit $\{E_k\}_{k=0}^r \times F$, telle que $z = \phi(x, y)$ soit l'unique solution dans V de l'équation $f(x, z) = y$.

L'existence de ϕ résulte du théorème des fonctions implicites appliqué à l'application f de classe C^r .

L'application ϕ est de classe C^r et sa différentielle est donnée par

$$d_1 \phi(x, y) = -d_2 f(x, \phi(x, y))^{-1} \circ d_1 f(x, \phi(x, y))$$

$$d_2 \phi(x, y) = d_2 f(x, \phi(x, y))^{-1}.$$

Comme $d_1 f$ admet une factorisation continue et localement bornée par $L(E_k; F)$ il résulte du corollaire 1.3.10. que $d\phi$ admet une factorisation continue et localement bornée par $L(E_k \times F; F)$, donc que ϕ est de classe D^1 .

L'application de classe D^r suivante

$$F : \Omega \rightarrow E_0 \times F \quad (x, y) \mapsto (x, f(x, y))$$

admet au voisinage du point (a, b) un inverse de classe D^1 :

$$F^{-1} : U \times W \rightarrow E_0 \times F \quad (x, y) \mapsto (x, \phi(x, y)) ;$$

le lemme II.4.3 entraîne alors que F^{-1} est de classe D^r , donc que ϕ est de classe D^r $\square$

Théorème 1.6. - Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle.

L'application Γ de $C^r(X, Y)$ dans $H^r(X \times Y)$ qui associe à un élément f de $C^r(X, Y)$ son graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \mid y = f(x)\}$ est un difféomorphisme de classe D^r sur une sous-variété ouverte de $H^r(X \times Y)$.

Etant donné un élément f de $C^r(X, Y)$, le graphe Γ_f est l'image de X par le plongement

$$\bar{f} : X \rightarrow X \times Y \quad x \mapsto (x, f(x)) .$$

Soit (F, U, Exp) une application exponentielle sur Y . On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*F \supset f^*U & \xrightarrow{\xi} & X \times Y & & \\
 \downarrow & \searrow & \swarrow & & \downarrow \\
 & F \supset U & \xrightarrow{\text{Exp}} & Y \times Y & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & Y & \xlongequal{\quad} & Y & \\
 \uparrow f & & & & \downarrow f \\
 X & \xlongequal{\quad} & X & &
 \end{array}$$

où la restriction de ξ à la section nulle s'identifie au plongement $\bar{f}$ et où ξ est un difféomorphisme de classe C^r de f^*U sur un voisinage de Γ_f dans

$X \times Y$; modulo l'isomorphisme de X sur Γ_f défini par $\bar{f}$, le triple (f^*F, f^*U, ξ) définit donc un voisinage tubulaire de classe C^r de Γ_f dans $X \times Y$. L'application exponentielle (F, U, Exp) définit une carte locale de $C^r(X, Y)$ au point f sur l'ouvert $C^r(f^*U)$ de $C^r(f^*F)$, le voisinage tubulaire (f^*F, f^*U, ξ) de Γ_f définit une carte locale de $H^r(X \times Y)$ au point Γ_f sur l'ouvert $C^r(f^*U)$ de $C^r(f^*F)$ et l'application Γ est représentée dans ces cartes par l'application identité. L'application Γ est donc un difféomorphisme local et comme elle est injective, il en résulte que Γ est un difféomorphisme sur une sous-variété ouverte de $H^r(X \times Y)$ $\square$

Corollaire 1.7. - Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. La variété Y s'identifie à la sous-variété ouverte de $H^r(Y)$ des sous-variétés ponctuelles de Y .

Il suffit dans le théorème 1.6 de prendre pour X la variété réduite à un point $\square$

Théorème 1.8. - Soient X une variété compacte de classe C^r , Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle et Z une sous-variété fermée de classe C^r de Y admettant aussi une application exponentielle. L'ensemble $C^r(X, Y)_Z$ des applications de classe C^r de X dans Y transversales sur Z est un ouvert de $C^r(X, Y)$; l'application

$$Z^* : C^r(X, Y)_Z \rightarrow H^r(X) \quad f \rightsquigarrow f^{-1}(Z)$$

est de classe D^r si l'on munit $C^r(X, Y)_Z$ de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $C^r(X, Y)$.

Notons ζ l'inclusion canonique de Z dans Y . Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f élément de $C^r(X, Y)$ soit transversale sur Z est que l'application $1_X \times \zeta$ de $X \times Z$ dans $X \times Y$ soit transver-

salle sur la sous-variété Γ_f de $X \times Y$; l'image réciproque $\{(x, z) | z = f(x)\}$ de Γ_f par $1_X \times \zeta$ est alors une sous-variété compacte de $X \times Z$ et la restriction de la projection de $X \times Z$ sur X à cette sous-variété est un plongement d'image $f^{-1}(Z)$. D'après le théorème 1.4 l'ensemble $H^r(1_X \times \zeta, X \times Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^r de $X \times Y$ sur lesquelles l'application $1_X \times \zeta$ est transversale est un ouvert de $H^r(X \times Y)$ et $C^r(X, Y)_Z$, image réciproque de cet ouvert par l'application continue Γ , est donc un ouvert de $C^r(X, Y)$. Par ailleurs, l'application Z^* admettant la factorisation suivante par des applications de classe D^r :

$$\begin{array}{ccccc}
 C^r(X, Y)_Z & \xrightarrow{\quad} & H^r(X \times Z, \pi_1) & \xrightarrow{(\pi_1)_*} & H^r(X) \\
 \downarrow & & \cap & & \\
 H^r(1_X \times \zeta, X \times Y) & \xrightarrow{(1_X \times \zeta)^*} & H^r(X \times Z) & &
 \end{array}$$

est une application de classe D^r $\square$

Proposition 1.9.- Soient Y_1 et Y_2 deux variétés de classe C^r admettant une application exponentielle. L'application

$$P : H^r(Y_1) \times H^r(Y_2) \rightarrow H^r(Y_1 \times Y_2) \quad (X_1, X_2) \rightsquigarrow X_1 \times X_2$$

est un difféomorphisme de classe D^r sur une sous-variété ouverte de $H^r(Y_1 \times Y_2)$.

Il suffit de constater que le produit d'un voisinage tubulaire de X_1 dans Y_1 par un voisinage tubulaire de X_2 dans Y_2 est un voisinage tubulaire de $X_1 \times X_2$ dans $Y_1 \times Y_2$ $\square$

Théorème 1.10.- Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'ensemble T_Y des couples de sous-variétés compactes de classe C^r de Y transversales est un ouvert de $H^r(Y) \times H^r(Y)$; l'application :

$$H^r(Y) \times H^r(Y) \supset T_Y \rightarrow H^r(Y) \quad (X_1, X_2) \rightsquigarrow (X_1 \cap X_2)$$

est de classe D^r si l'on munit T_Y de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $H^r(Y) \times H^r(Y)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour que deux sous-variétés X_1 et X_2 de Y soient transversales est que leur produit soit transversal sur la diagonale de $Y \times Y$. D'après le théorème 1.4, l'ensemble $H^r(\Delta, Y \times Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^r de $Y \times Y$ sur lesquelles Δ est transversale est un ouvert de $H^r(Y \times Y)$ et T_Y , image réciproque de cet ouvert par l'application continue P (proposition 1.9), est donc un ouvert de $H^r(Y) \times H^r(Y)$. L'application d'intersection admettant la factorisation suivante par des applications de classe D^r :

$$H^r(Y) \times H^r(Y) \supset T_Y \xrightarrow{P} H^r(\Delta, Y \times Y) \xrightarrow{\Delta^*} H^r(Y)$$

est une application de classe D^r $\square$

Corollaire 1.11.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'ensemble $T_{X,Y}$ des couples (f, X') formés d'une sous-variété compacte X' de classe C^r de Y et d'une application f de classe C^r de X dans Y transversale sur X' est un ouvert de $C^r(X, Y) \times H^r(Y)$; l'application

$$C^r(X, Y) \times H^r(Y) \supset T_{X,Y} \rightarrow H^r(X) \quad (f, X') \rightsquigarrow f^{-1}(X')$$

est de classe D^r si l'on munit $T_{X,Y}$ de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $C^r(X, Y) \times H^r(Y)$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application f soit transversale sur une sous-variété X' est que les sous-variétés Γ_f et $X \times X'$ de $X \times Y$ soient transversales. L'ensemble $T_{X,Y}$ est donc l'image réciproque de l'ouvert $T_{X \times Y}$ de $H^r(X \times Y) \times H^r(X \times Y)$ par l'application de classe D^r

$$C^r(X,Y) \times H^r(Y) \rightarrow H^r(X \times Y) \times H^r(X \times Y) \quad (f, X') \rightsquigarrow (\Gamma_{f'}, X \times X') ;$$

cette application étant continue, $T_{X,Y}$ est bien un ouvert. L'intersection de Γ_f et de $X \times X'$ est une sous-variété compacte de $X \times Y$ et la restriction de la projection de $X \times Y$ sur X à cette sous-variété est un plongement d'image $f^{-1}(X')$. L'application de prise de l'image réciproque admet donc la factorisation suivante par des applications de classe D^r

$$\begin{array}{ccccc} C^r(X,Y) \times H^r(Y) \supset T_{X,Y} & \longrightarrow & H^r(X \times Y, \pi_1) & \xrightarrow{(\pi_1)_*} & H^r(X) \\ \downarrow & & \downarrow & \cap & \\ H^r(X \times Y) \times H^r(X \times Y) \supset T_{X \times Y} & \xrightarrow{\cap} & H^r(X \times Y) & & \end{array}$$

et elle est donc de classe D^r $\square$

Rappelons que si X est une variété de classe D^r , nous notons $V_h X$ la structure de variété de classe D^{r-h} sous-jacente à la structure de classe D^r .

Théorème 1.12. - Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Pour tout h vérifiant $0 \leq h \leq r$, l'application d'inclusion

$$V_h H^r(Y) \rightarrow H^{r-h}(Y) \quad X \rightsquigarrow X$$

est de classe D^{r-h} .

Relativement aux cartes locales canoniques de $V_h H^r(Y)$ et de $H^{r-h}(Y)$ en un point X de $V_h H^r(Y)$ associées à un voisinage tubulaire (E, D, ξ) de classe C^r de X , cette application est un morphisme de la catégorie $\underline{C}^{r-h}$, donc une application de classe D^{r-h} $\square$

Remarque 1.13. - Nous verrons au paragraphe 2 (corollaire 2.2) une démonstration simple de ce que l'image de $H^r(Y)$ dans $H^{r-h}(Y)$ est dense.

§ 2 - FIBRATION PRINCIPALE DES ESPACES DE PLONGEMENTS. -

Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'ensemble $Pl^r(X,Y)$ des plongements de classe C^r de X dans Y est un ouvert de $C^r(X,Y)$; nous munirons $Pl^r(X,Y)$ de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $C^r(X,Y)$. Nous noterons $H_X^r(Y)$ l'ensemble des sous-variétés de classe C^r de Y diffeomorphes à X ; cet ensemble est un ouvert de $H^r(Y)$ et nous le munirons de la structure de variété de classe D^r induite par celle de $H^r(Y)$.

Proposition 2.1.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'application π de $Pl^r(X,Y)$ dans $H_X^r(Y)$ qui associe à tout plongement f la sous-variété de Y image de X par f est une application de classe D^r , elle est surjective et elle admet des sections locales de classe D^r .

Soit f un élément de $Pl^r(X,Y)$. On définit une carte locale de $Pl^r(X,Y)$ au point f en choisissant une application exponentielle (F,U,Exp) sur Y et une carte locale de $H_X^r(Y)$ au point $f(X)$ en choisissant un voisinage tubulaire (E,D,ξ) de classe C^r de $f(X)$. Soit θ l'application de classe C^r définie sur un voisinage de la section nulle de f^*F , à valeurs dans E , par

$$f^*F \rightarrow F \supset U \xrightarrow{Exp} Y \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y \supset \xi(D) \xrightarrow{\xi^{-1}} E.$$

L'application π a pour représentant, relativement aux cartes locales choisies, l'application $\hat{\theta}$, qui est de classe D^r d'après le lemme 1.2. Par ailleurs, l'application composée

$$C^r(D) \xrightarrow{\omega_\xi} Pl^r(f(X),Y) \xrightarrow{\alpha_f} Pl^r(X,Y)$$

où α_f est la composition à droite avec f , est de classe D^r et elle définit

une section locale de π au point f $\square$

Corollaire 2.2.- Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. L'image de $H^r(Y)$ est dense dans $H^{r-h}(Y)$.

Soit X un élément de $H^{r-h}(Y)$ et $\bar{X}$ la variété X munie d'une super structure de variété de classe C^r . Nous allons montrer que l'image de $H_X^r(Y)$ est dense dans $H_{\bar{X}}^{r-h}(Y)$. Soit π la projection de $Pl^{r-h}(\bar{X}, Y)$ sur $H_X^{r-h}(Y)$. Quel que soit le voisinage ouvert U de X dans $H_X^{r-h}(Y)$, $\pi^{-1}(U)$ est un ouvert de $Pl^{r-h}(\bar{X}, Y)$. Il existe donc un plongement f de classe C^r de $\bar{X}$ dans Y contenu dans $\pi^{-1}(U)$ et $f(\bar{X})$ est une sousvariété de classe C^r de Y contenu dans U $\square$

Le groupe $Aut^r(X)$, de classe D^r , opère par composition à droite sur $Pl^r(X, Y)$:

$$\Phi : Aut^r(X) \times Pl^r(X, Y) \rightarrow Pl^r(X, Y) \quad (g, f) \rightsquigarrow fog.$$

Cette action Φ est de classe D^r , elle respecte la fibration définie par π et elle est simplement transitive sur les fibres.

Proposition 2.3.- Soient X une variété compacte de classe C^r , Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle et Z une variété de classe D^t , avec $t \leq r$. Une condition nécessaire et suffisante pour que deux applications f et f' de classe D^t de Z dans $Pl^r(X, Y)$ soient égalisées par π est qu'il existe une application h de classe D^t de Z dans $Aut^r(X)$ telle que $f' = \Phi(h, f)$; cette application h est unique.

La condition est manifestement suffisante; montrons qu'elle est nécessaire. L'action Φ étant simplement transitive sur les fibres il existe une unique application ensembliste h de Z dans $Aut^r(X)$ telle que $f' = \Phi(h, f)$, le difféomorphisme $h(z)$ étant construit de la manière suivante :

$f(z)$ et $f'(z)$ sont des difféomorphismes de X sur leur image $X_z = \pi \circ f(z) = \pi \circ f'(z)$ et l'on a

$$h(z) = f(z)^{-1} \circ f'(z) .$$

Les applications $\pi \circ f$ et $\pi \circ f'$ étant continues, quel que soit le point z_0 de Z et quelle que soit la carte locale de $H_X^r(Y)$ au point $X_0 = \pi \circ f(z_0) = \pi \circ f'(z_0)$, définie par un voisinage tubulaire (E, D, ξ) , il existe un voisinage U de z_0 tel que $\pi \circ f(U) = \pi \circ f'(U)$ soit contenu dans cette carte. Si p est la projection de E sur X_0 , la restriction de $p \circ \xi^{-1}$ à X_0 est un difféomorphisme de X_z sur X_0 et l'on a

$$h(z) = [p \circ \xi^{-1} \circ f(z)]^{-1} \circ [p \circ \xi^{-1} \circ f'(z)] ,$$

ce qui permet d'écrire

$$h|U = \gamma \circ [\omega_{p \circ \xi^{-1}} \circ (f'|U) \times \text{inv} \circ \omega_{p \circ \xi^{-1}} \circ (f|U)]$$

où $\omega_{p \circ \xi^{-1}}$ est une application de classe D^r d'un ouvert de $Pl^r(X, Y)$ dans $\text{Isom}^r(X, X_0)$ (théorème II.3.5), l'application de prise de l'inverse inv de $\text{Isom}^r(X, X_0)$ est de classe D^r ainsi que l'application de composition γ ; il en résulte que h est de classe D^t $\square$

Théorème 2.4.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. La variété $Pl^r(X, Y)$ est l'espace total d'un espace fibré principal de classe D^r , de base $H_X^r(Y)$, de projection π et de groupe structural le groupe $\text{Aut}^r(X)$.

Soit s_U une section locale de π , de classe D^r , définie sur un ouvert U de $H_X^r(Y)$; on lui associe l'application composée

$$\phi_U : U \times \text{Aut}^r(X) \xrightarrow{s_U \times 1} Pl^r(X, Y) \times \text{Aut}^r(X) \xrightarrow{\Phi} Pl^r(X, Y) .$$

L'application ϕ_U est de classe D^r , c'est une bijection de $U \times \text{Aut}^r(X)$ sur $\pi^{-1}(U)$ et l'application inverse est de la forme

$$\phi_U^{-1} : \pi^{-1}(U) \xrightarrow{\pi \times h} U \times \text{Aut}^r(X)$$

où h est l'application de $\pi^{-1}(U)$ dans $\text{Aut}^r(X)$ telle que $\phi(h, s_U \circ \pi)$ soit l'inclusion canonique de $\pi^{-1}(U)$ dans $\text{Pl}^r(X, Y)$. L'application $s_U \circ \pi$ et l'inclusion canonique de $\pi^{-1}(U)$ dans $\text{Pl}^r(X, Y)$ étant deux applications de classe D^r égalisées par π il résulte de la proposition 2.3 que h est de classe D^r et l'application ϕ_U est donc un difféomorphisme de classe D^r qui définit une carte locale du fibré $(\text{Pl}^r(X, Y), \pi, H_X^r(Y))$.

Soient ϕ_U et ϕ_V deux cartes de ce type. Le changement de cartes

$$\phi_{V,U} : (U \cap V) \times \text{Aut}^r(X) \rightarrow (U \cap V) \times \text{Aut}^r(X) \quad (x, g) \mapsto (x, f_{V,U}(x, g))$$

est tel que l'on ait

$$s_U(x) \circ g = s_V(x) \circ f_{V,U}(x, g) \quad .$$

Les applications $s_U|_{U \cap V}$ et $s_V|_{U \cap V}$ étant deux applications de classe D^r égalisées par π il existe une application $s_{V,U}$ de classe D^r de $U \cap V$ dans $\text{Aut}^r(X)$ telle que l'on ait

$$s_U(x) = s_V(x) \circ s_{V,U}(x)$$

d'où il résulte que

$$s_{V,U}(x) \circ g = f_{V,U}(x, g)$$

ce qui achève la démonstration $\square$

Une première application de la fibration principale

$$\Pi = (\text{Pl}^r(X, Y), \pi, H_X^r(Y), \text{Aut}^r(X))$$

est l'identification du fibré tangent de $H_X^r(Y)$: le fibré tangent $T_h \text{Pl}^r(X, Y)$, qui nous est donné par le théorème II.3.8, est l'image réciproque par π d'un fibré de base $H_X^r(Y)$ et l'espace tangent $T_h H_X^r(Y)$ est quotient de ce fibré par le fibré de base $H_X^r(Y)$, de fibre $[T_h \text{Aut}^r(X)]_{1_X} = C^{r-h}(TX)$ et de groupe structural $\text{Aut}^r(X)$ opérant par la représentation adjointe, associé au fibré principal Π . Un tel résultat reliant l'espace tangent de la base à l'espace tangent de l'espace total est valable pour un espace fibré principal de classe D^r quelconque, et en particulier pour un espace fibré principal de classe C^r ; la démonstration que nous allons donner n'est qu'une adaptation au cas de la géométrie dérivable de la démonstration usuelle de la géométrie différentielle.

Soit G un groupe de classe D^r ; nous noterons γ la loi de composition de G , ι l'application de prise de l'inverse et A_h la fibre de l'espace tangent $T_h G$ en l'élément neutre e . L'application composée

$$\begin{array}{ccccc} T_h G & \xrightarrow{1_{T_h G} \times 0} & T_h G \times T_h G & \xrightarrow{T_h D} & T_h G \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \xrightarrow{\Delta} & G \times G & \xrightarrow{D} & G \end{array}$$

où Δ est l'application diagonale et D la différence $D(g_1, g_2) = \gamma(g_1, \iota(g_2)) = g_1 \cdot g_2^{-1}$, dont la restriction à la fibre en un point g de G est une application linéaire continue

$$(T_h G)_g \rightarrow (T_h G)_e = A_h \quad \bar{g} \rightsquigarrow \delta_h \gamma(g, g^{-1}) \cdot (\bar{g}, 0) = \delta_h \gamma^{g^{-1}}(g) \cdot \bar{g}$$

où $\gamma^{g^{-1}}$ est la translation à droite par g^{-1} , admettant une application inverse

$$A_h = (T_h G)_e \rightarrow (T_h G)_g \quad \bar{a} \rightsquigarrow \delta_h \gamma(e, g) \cdot (\bar{a}, 0) = \delta_h \gamma^g(e) \cdot \bar{a},$$

identifie $T_h G$ au fibré image réciproque de $T_h G$ par l'application constante $\text{Do}\Delta$, c'est-à-dire au fibré trivial $G \times A_h$. Relativement à cette trivialisation, l'application tangente de γ en un point (g_1, g_2) a pour expression

$$\delta_h \gamma^{g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}}(g_1, g_2) \circ \delta_h \gamma(g_1, g_2) \circ \left[\delta_h \gamma^{g_1}(e) \times \delta_h \gamma^{g_2}(e) \right]$$

soit, d'après le théorème de différentiation des fonctions composées, la différentielle

$$\delta_h \left[\gamma^{g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}} \circ \gamma \circ [\gamma^{g_1} \times \gamma^{g_2}] \right](e, e) \quad .$$

Nous avons

$$\left[\gamma^{g_2^{-1} \cdot g_1^{-1}} \circ \gamma \circ [\gamma^{g_1} \times \gamma^{g_2}] \right](a_1, a_2) = a_1 \cdot g_1 \cdot a_2 \cdot g_1^{-1} = a_1 \cdot \rho^{g_1}(a_2)$$

où ρ^g est l'automorphisme interne défini par l'élément g de G ; en introduisant la représentation adjointe ρ_h de G sur A_h définie par $\rho_h^g = \delta_h \rho^g(e)$, l'application tangente de γ au point (g_1, g_2) relativement à la trivialisation à droite du fibré tangent $T_h G$ s'exprime par

$$A_h \times A_h \rightarrow A_h \quad (\bar{a}_1, \bar{a}_2) \rightsquigarrow \delta_h \gamma(e, e) \cdot (\bar{a}_1, \rho_h^{g_1} \cdot \bar{a}_2) = \bar{a}_1 + \rho_h^{g_1} \cdot \bar{a}_2 \quad .$$

Soit $E = (E, p, B, G)$ un espace fibré principal de classe D^r ; nous allons étudier l'action de G sur E par translations à droite et l'action de G sur l'espace tangent $T_h E$ qui en est déduite par différentiation. On considère une carte locale ϕ de E sur $U \times G$, où U est un ouvert de l'espace E_0 d'une chaîne $\{E_k\}_{k=0}^r$; compte tenu de la trivialisation à droite de l'espace tangent $T_h G$, on associe à cette carte une carte locale de $T_h E$ sur $U \times G \times E_h \times A_h$. Relativement à ces cartes, la translation à droite sur E par un élément g_0 de G et son application tangente ont pour expression

$$\begin{aligned} U \times G &\rightarrow U \times G & (x, g) &\rightsquigarrow (x, g \cdot g_0) \\ U \times G \times E_h \times A_h &\rightarrow U \times G \times E_h \times A_h & (x, g, \bar{x}, \bar{a}) &\rightsquigarrow (x, g \cdot g_0, \bar{x}, \bar{a}) ; \end{aligned}$$

nous pouvons donc associer à la carte ϕ de E une carte locale de $T_h E/G$ sur $U \times E_h \times A_h$. Soit maintenant une carte locale ψ de E sur $V \times G$; le changement de

carte entre ϕ et ψ étant de la forme

$$U \times G \rightarrow V \times G \quad (x, g) \rightsquigarrow (\xi(x), \sigma(x) \cdot g) ,$$

les changements de cartes associés pour $T_h E$ et $T_h E/G$ sont de la forme

$$\begin{aligned} U \times G \times E_h \times A_h &\rightarrow V \times G \times F_h \times A_h & (x, g, \bar{x}, \bar{a}) &\rightsquigarrow (\xi(x), \sigma(x) \cdot g, \delta_h \xi(x) \cdot \bar{x}, \delta_h \sigma(x) \cdot \bar{x} + \rho_h^{\sigma(x)} \cdot \bar{a}) \\ U \times E_h \times A_h &\rightarrow V \times F_h \times A_h & (x, \bar{x}, \bar{a}) &\rightsquigarrow (\xi(x), \delta_h \xi(x) \cdot \bar{x}, \delta_h \sigma(x) \cdot \bar{x} + \rho_h^{\sigma(x)} \cdot \bar{a}) . \end{aligned}$$

L'espace quotient $T_h E/G$ est donc un espace fibré vectoriel et les applications locales

$$U \times E_h \times A_h \rightarrow U \times E_h \quad (x, \bar{x}, \bar{a}) \rightsquigarrow (x, \bar{x})$$

définissent un morphisme de $T_h E/G$ sur $T_h B$ identifiant $T_h B$ à un quotient de $T_h E/G$. Soit G_h le fibré de base B , de fibre A_h , de groupe G opérant sur A_h par la représentation adjointe ρ_h , associé au fibré E . Les applications locales

$$U \times A_h \rightarrow U \times E_h \times A_h \quad (x, \bar{a}) \rightsquigarrow (x, 0, \bar{a})$$

définissent un morphisme de G_h dans $T_h E/G$ et l'on a une suite exacte courte de fibrés de classe D^{r-h} :

$$0 \rightarrow G_h \rightarrow T_h E/G \rightarrow T_h B \rightarrow 0 .$$

On identifiera pratiquement le sous-fibré G_h de la manière suivante : l'application tangente de l'action de G sur E a pour expression locale

$$(U \times G \times E_h \times A_h) \times (G \times A_h) \rightarrow U \times G \times E_h \times A_h \quad (x, g_1, \bar{x}, \bar{a}_1; g_2, \bar{a}_2) \rightsquigarrow (x, g_1 \cdot g_2, \bar{x}, \bar{a}_1 + \rho_h^{g_1} \cdot \bar{a}_2) ;$$

pour (x, g_1) fixé, $(\bar{x}, \bar{a}_1) = 0$ et $g_2 = e$ on a une application

$$A_h \rightarrow E_h \times A_h \quad \bar{a}_2 \rightsquigarrow (0, \rho_h^{g_1} \cdot \bar{a}_2)$$

dont l'image $\{0\} \times A_h$ donne par passage au quotient la fibre de G_h au point de B correspondant à x .

Nous allons appliquer ces résultats au fibré principal

$$\Pi = (Pl^r(X, Y), \pi, H_X^r(Y), Aut^r(X))$$

en supposant $r-h$ supérieur ou égal à 1. L'espace $T_h \text{Pl}^r(X, Y)$ est, dans la catégorie des variétés de classe D^{r-h} , le produit fibré de $V_h \text{Pl}^r(X, Y)$ par $C^{r-h}(X, TY)$ pour l'inclusion canonique de $V_h \text{Pl}^r(X, Y)$ dans $C^{r-h}(X, Y)$ et la projection ω_{τ_Y} de $C^{r-h}(X, TY)$ sur $C^{r-h}(X, Y)$. Il suffit de considérer la partie de $C^{r-h}(X, TY)$ au-dessus de la sous-variété ouverte $\text{Pl}^{r-h}(X, Y)$: c'est l'ouvert $\text{Pl}^{r-h}(X, TY, \tau_Y)$ des plongements f de classe C^{r-h} de X dans TY tels que $\tau_Y \circ f$ soit un plongement de X dans Y . On a donc le produit fibré suivant dans la catégorie des variétés de classe D^{r-h} :

$$(1) \quad \begin{array}{ccc} T_h \text{Pl}^r(X, Y) & \longrightarrow & \text{Pl}^{r-h}(X, TY, \tau_Y) \subset \text{Pl}^{r-h}(X, TY) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_h \text{Pl}^r(X, Y) & \longrightarrow & \text{Pl}^{r-h}(X, Y) \end{array}$$

D'après la remarque II.3.9.3 l'action d'un élément g de $\text{Aut}^r(X)$ sur $T_h \text{Pl}^r(X, Y)$ en un point f de $\text{Pl}^r(X, Y)$ est la suivante :

$$C^{r-h}(X, TY)_f \rightarrow C^{r-h}(X, TY)_{f \circ g} \quad \bar{f} \rightsquigarrow \bar{f} \circ g$$

c'est-à-dire que l'action de $\text{Aut}^r(X)$ sur $T_h \text{Pl}^r(X, Y)$ se déduit par produit fibré de l'action de $\text{Aut}^r(X)$ sur $\text{Pl}^{r-h}(X, TY)$. Le diagramme (1) donne donc par passage au quotient par $\text{Aut}^r(X)$ le diagramme

$$(2) \quad \begin{array}{ccc} T_h \text{Pl}^r(X, Y) / \text{Aut}^r(X) & \longrightarrow & H_X^{r-h}(TY, \tau_Y) \subset H_X^{r-h}(TY) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_h H_X^r(Y) & \longrightarrow & H_X^{r-h}(TY) \end{array}$$

qui identifie $T_h \text{Pl}^r(X, Y) / \text{Aut}^r(X)$ au produit fibré dans la catégorie des variétés de classe D^{r-h} de $V_h H_X^r(Y)$ par la variété $H_X^{r-h}(TY, \tau_Y)$ des sous-variétés de classe C^{r-h} de TY , difféomorphes à X et sur lesquelles la restriction de τ_Y est un plongement (cf. théorème 1.3). La fibre de $T_h \text{Pl}^r(X, Y) / \text{Aut}^r(X)$ en un point X' de $H_X^r(Y)$ est donc l'espace des champs de classe C^{r-h} de vec-

teurs tangents à Y le long de la sous-variété X' , c'est-à-dire l'espace $C^{r-h}(TY|X')$ des sections de classe C^{r-h} du fibré TY restreint à X' . L'espace tangent $T_h H_X^r(Y)$ est le quotient de $T_h Pl^r(X,Y)/Aut^r(X)$ par un sous-fibré que nous allons identifier : l'application tangente de l'action de $Aut^r(X)$ sur $Pl^r(X,Y)$ en le point $(f, 1_X)$ est, d'après la remarque II.3.9.3, la suivante

$$C^{r-h}(X, TY)_f \times C^{r-h}(X, TX)_{1_X} \rightarrow C^{r-h}(X, TY)_f \quad (\bar{f}, \bar{g}) \rightsquigarrow \bar{f} + T f \bar{g} ;$$

l'image de $\{0\} \times C^{r-h}(X, TX)_{1_X} = C^{r-h}(TX)$ est donc l'espace des champs de classe C^{r-h} de vecteurs tangents à la sous-variété X' image de f .

Théorème 2.5.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Si $r-h > 1$ l'espace tangent $T_h H_X^r(Y)$ est le quotient de l'espace fibré des champs de classe C^{r-h} de vecteurs tangents à Y définis sur une sous-variété élément de $H_X^r(Y)$ par le sous-fibré des champs de vecteurs tangents à leur domaine de définition ; l'espace fibré des champs de classe C^{r-h} de vecteurs tangents à Y définis sur une sous-variété élément de $H_X^r(Y)$ est, dans la catégorie des variétés de classe D^{r-h} , le produit fibré de $V_h H_X^r(Y)$ par $H_X^{r-h}(TY, \tau_Y)$ au-dessus de $H_X^{r-h}(Y)$; le sous-espace des champs de vecteurs tangents à leur domaine de définition est l'espace fibré de classe D^{r-h} de base $V_h H_X^r(Y)$, de fibre $C^{r-h}(TX)$ considéré comme une variété de classe D^{r-h} modelée sur la chaîne $C_*^{r-h}(TX)$ et de groupe structural $V_h Aut^r(X)$ opérant par la représentation adjointe

$$\rho_h : Aut^r(X) \times C^{r-h}(TX) \rightarrow C^{r-h}(TX) \quad (g, \bar{f}) \rightsquigarrow T g \bar{f} g^{-1} ,$$

associé au fibré principal $(Pl^r(X,Y), \pi, H_X^r(Y), Aut^r(X))$.

Remarque 2.6.- Soit X un élément de $H^r(Y)$ et soit NX le fibré normal de X dans Y , c'est-à-dire le quotient de $TY|X$ par le sous-fibré TX .

La fibre de $T_h H_X^r(Y) = T_h H^r(Y)|_{H_X^r(Y)}$ au point X , qui est le quotient de $C^{r-h}(TY|X)$ par le sous-espace $C^{r-h}(TX)$, s'identifie à l'espace $C^{r-h}(NX)$. On peut alors, sur le modèle de la remarque II.3.9, exprimer relativement à cette identification les applications tangentes des applications rencontrées dans l'étude des variétés $H^r(Y)$. On a par exemple :

2.6.1.- Soient Y et Z deux variétés de classe C^r admettant une application exponentielle et f une application de classe C^r de Y dans Z . Soit X un point de $H^r(Y, f)$ (cf. théorème 1.3) ; le diagramme commutatif de morphismes de fibrés

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & TX & \longrightarrow & TY|X & \longrightarrow & NX \rightarrow 0 \\ & & \downarrow T(f|X) & & \downarrow Tf & & \\ 0 & \rightarrow & Tf(X) & \longrightarrow & TZ|f(X) & \longrightarrow & Nf(X) \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, définit un morphisme Nf de NX dans $Nf(X)$ au dessus du difféomorphisme $f|X$. L'application tangente de f_* au point X est alors

$$\delta_h f_*(X) : C^{r-h}(NX) \rightarrow C^{r-h}(Nf(X)) \quad s \mapsto Nf \circ s \circ (f|X)^{-1}.$$

2.6.2.- Soient Y et Z deux variétés de classe C^r admettant une application exponentielle et f une application fermée de classe C^r de Y dans Z . Soit X un point de $H^r(f, Z)$ (cf. théorème 1.4) ; le diagramme commutatif de morphismes de fibrés

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & Tf^{-1}(X) & \longrightarrow & TY|f^{-1}(X) & \longrightarrow & Nf^{-1}(X) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow T(f|f^{-1}(X)) & & \downarrow Tf & & \\ 0 & \rightarrow & TX & \longrightarrow & TZ|X & \longrightarrow & NX \rightarrow 0 \end{array}$$

où les lignes sont exactes, définit un morphisme Nf de $Nf^{-1}(X)$ dans NX qui identifie $Nf^{-1}(X)$ à l'image réciproque de NX . L'application tangente de f au point X est alors

$$\delta_h f^*(X) : C^{r-h}(NX) \rightarrow C^{r-h}(Nf^{-1}X) \quad s \rightsquigarrow f^*(s)$$

où $f^*(s)$ est l'image réciproque de la section s .

§ 3 - CARACTERISATION DES APPLICATIONS DERIVABLES DE BUT $H^r(Y)$.

Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Etant donné une variété banachique B de classe C^s , avec $0 \leq s \leq r$ nous noterons $D^s(B, H^r(Y))$ l'ensemble des applications de classe D^s de B dans la variété $H^r(Y)$ des sous-variétés compactes de classe C^r de Y . Nous allons donner une interprétation géométrique des éléments de $D^s(B, H^r(Y))$.

Si X est un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de sous-variétés compactes de classe C^r de Y , on a

$$H^r(Y) = \coprod_{X \in X} H_X^r(Y) .$$

Soit $\{B_i\}_{i \in I}$ l'ensemble des composantes connexes de la variété B ; la décomposition de $H^r(Y)$ en une réunion disjointe de sous-variétés ouvertes permet d'écrire

$$D^s(B, H^r(Y)) = \prod_{i \in I} \coprod_{X \in X} D^s(B_i, H_X^r(Y)) .$$

Il suffit donc d'étudier les applications de classe D^s d'une variété banachique connexe dans une sous-variété $H_X^r(Y)$. Cette étude nécessite l'introduction d'un raffinement de la notion d'espace fibré au sens d'Ehresmann-Feldbau, tenant compte de ce que les fibres peuvent être des variétés de classe supérieure à celle de la fibration.

Définition 3.1. - Soient F une variété de classe C^r et G un sous-groupe du groupe (non topologique) des difféomorphismes de classe C^r de F ; soient encore deux variétés E et B de classe C^s , avec $0 \leq s \leq r$, et p une projection de classe C^s de E sur B . Un atlas de fibré de classe $D^{r,s}$ de fibre F et de groupe G sur le triple (E, p, B) est la donnée d'une famille $\{U_i, \phi_i\}_{i \in I}$ où $\{U_i\}_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de B et

$$\phi_i : p^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times F$$

est un difféomorphisme de classe C^S vérifiant les propriétés suivantes :

1. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\phi_i} & U_i \times F \\ \downarrow p & & \downarrow \pi_1 \\ U_i & \xlongequal{\quad} & U_i \end{array}$$

est commutatif.

2. Les changements de cartes

$$\phi_{j,i} : (U_i \cap U_j) \times F \rightarrow (U_i \cap U_j) \times F \quad (b,x) \rightsquigarrow (b, f_{j,i}(b,x))$$

sont tels que pour b fixé, le difféomorphisme $f_{j,i}(b, \cdot)$ de F soit un élément de G et que l'application $f_{j,i}$ soit ${}^t D(r,s)$ fois partiellement continûment différentiable (${}^t D(r,s)$ est la partie de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ transposée de $D(r,s)$; on a donc ${}^t D(r,s) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha + \beta \leq r, \alpha \leq s\}$).

Deux atlas de fibrés de classe $D^{r,s}$, de fibre F et de groupe G sur (E, p, B) sont dits équivalents si leur réunion est encore un atlas de classe $D^{r,s}$. Une structure d'espace fibré de classe $D^{r,s}$, de fibre F et de groupe G est définie sur (E, p, B) par une classe d'équivalence d'atlas.

Nous noterons $\underline{\underline{D}}^{r,s}(F, G)$ la classe des espaces fibrés de classe $D^{r,s}$, de fibre F et de groupe G et $\underline{\underline{D}}_B^{r,s}(F, G)$ la sous-classe des fibrés de base B donnée ; les classes $\underline{\underline{D}}^{r,s}(F, \text{Aut}^r(F))$ et $\underline{\underline{D}}_B^{r,s}(F, \text{Aut}^r(F))$ seront notées respectivement $\underline{\underline{D}}^{r,s}(F)$ et $\underline{\underline{D}}_B^{r,s}(F)$.

Remarque 4.2. - Si la fibre F est compacte, le groupe $\text{Aut}^r(F)$ des difféomorphismes de classe C^r de F est un groupe de classe D^r et, pour un fibré élément de $\underline{\underline{D}}^{r,s}(F, G)$, les conditions imposées aux changements de cartes

sont équivalentes aux conditions suivantes : les applications

$$a_{j,i} : U_i \cap U_j \rightarrow \text{Aut}^r(F) \quad b \rightsquigarrow f_{j,i}(b,.)$$

sont de classe D^S et prennent leurs valeurs dans le sous-ensemble G . On a alors les cas particuliers suivants :

Proposition 4.3.- Soit F une variété compacte de classe C^r . La classe $\underline{D}^{r,S}(F)$ s'identifie à la classe des espaces fibrés de Steenrod de classe D^S , de fibre F et de groupe structural $\text{Aut}^r(F)$.

Proposition 4.4.- Soient F une variété compacte de classe C^r , G un groupe de Lie, ϕ un morphisme de classe D^r de G dans $\text{Aut}^r(F)$ définissant une action effective de G sur F et G le sous-groupe image de G par ϕ . Si G est de dimension finie, la classe $\underline{D}^{r,S}(F,G)$ s'identifie à la classe des espaces fibrés de Steenrod de classe C^S , de fibre F et de groupe structural G .

Si l'on considère les espaces fibrés de base une variété B , il suffit de montrer que toute application u de classe D^S d'un ouvert U de B dans $\text{Aut}^r(F)$, prenant ses valeurs dans G , se factorise de manière unique en une application de classe C^S de U dans G . L'action de G sur F étant effective, l'application ϕ est injective ; l'application u admet donc une unique factorisation ensembliste $\hat{u}$ par G . D'après le théorème II.4.7, l'application ϕ est une immersion ; du point de vue topologique, G est donc l'espace localement connexe universel attaché à l'espace G muni de la topologie induite par $\text{Aut}^r(F)$ et U étant localement connexe, la factorisation $\hat{u}$ est continue ; enfin, l'application ϕ étant localement un difféomorphisme de classe D^r sur son image, $\hat{u}$ est de classe C^S $\square$

Définition 4.5. - Soit $\underline{D}_B^{r,s}$ la réunion des classes $\underline{D}_B^{r,s}(F)$ lorsque F parcourt la classe des variétés de classe C^r . Soit E (resp. E') un élément de $\underline{D}_B^{r,s}$, d'espace total E (resp. E') ; un morphisme de E dans E' est une application f de E dans E' , fibrée au dessus de l'identité de B , telle que si (U, ϕ) et (U, ϕ') sont des cartes locales de E et de E' , l'application induite par f sur ces cartes locales :

$$\phi' \circ (f|_{E_U}) \circ \phi^{-1} : U \times F \rightarrow U \times F' \quad (b, x) \rightsquigarrow (b, f_U(b, x))$$

est telle que f_U soit $t_{D(r,s)}$ fois partiellement continûment différentiable ; on définit ainsi une structure de catégorie sur la classe $\underline{D}_B^{r,s}$. Un plongement de E dans E' est un morphisme dont la restriction à chaque fibre est un plongement.

Définition 4.6. - Soit F un espace fibré élément de $\underline{D}_B^{r,s}$. Nous noterons $K_X^{r,s}(F)$ la classe des plongements d'un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ dans F , modulo la relation d'équivalence suivante : deux plongements $f : E \rightarrow F$ et $f' : E' \rightarrow F$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme h de E' sur E , au sens de la catégorie $\underline{D}_B^{r,s}$, tel que $f' = f \circ h$. Un élément de $K_X^{r,s}(F)$ sera appelé un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ plongé dans F .

Lemme 4.7. - Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ plongé dans un fibré F élément de $\underline{D}_B^{r,s}(Y)$ est entièrement caractérisé par son image dans l'espace total de F .

Il est clair que deux plongements équivalents ont même image. Réciproquement, soient $f : E \rightarrow F$ et $f' : E' \rightarrow F$ deux plongements de même image. Les applications f et f' étant des bijections sur leurs images, on a du point de vue ensembliste une application fibrée $h : E' \rightarrow E$ telle que $f' = f \circ h$, dont

la restriction à chaque fibre est un difféomorphisme de classe C^r ; nous devons montrer que h définit un morphisme de E' dans E au sens de la catégorie $\underline{D}_B^{r,s}$. Plaçons nous en coordonnées locales :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & (b,x) & \xrightarrow{\text{wavy}} & (b, f_U(b,x)) \\
 (b, h_U(b,x)) & U \times X & & \searrow & \\
 \uparrow \text{wavy} & \uparrow & & & U \times Y \\
 (b,x) & U \times X & & \nearrow & \\
 & & (b,x) & \xrightarrow{\text{wavy}} & (b, f'_U(b,x))
 \end{array}$$

Les applications f_U et f'_U qui sont $t_{D(r,s)}$ fois partiellement continûment différentiables définissent des applications de classe D^s

$$\bar{f}_U, \bar{f}'_U : U \rightarrow \text{Pl}^r(X, Y)$$

égalisées par la projection π sur $H_X^r(Y)$; l'application h_U définit une application ensembliste

$$\bar{h}_U : U \rightarrow \text{Aut}^r(X)$$

telle que $\bar{f}'_U = \phi(\bar{h}_U, \bar{f}_U)$. La proposition 2.3 entraîne que $\bar{h}_U$ est une application de classe D^s , donc que h_U est $t_{D(r,s)}$ fois partiellement continûment différentiable, ce qui démontre que h est un morphisme $\square$

Corollaire 4.8.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. La classe $K_X^{r,s}(F)$ des fibrés élément de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ plongés dans un fibré F élément de $\underline{D}_B^{r,s}(Y)$ est un ensemble.

Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Le groupe $\text{Aut}^r(X)$ opérant

sur X , on associe à l'espace fibré principal $(Pl^r(X,Y), \pi, H_X^r(Y))$ de classe D^r , de groupe structural $Aut^r(X)$, un espace fibré de classe D^r , de fibre X et de groupe structural $Aut^r(X)$ dont nous noterons $E_X^r(Y)$ l'espace total. A toute section locale s_U de classe D^r de π on associe une carte locale du fibré $Pl^r(X,Y)$, donc du fibré $E_X^r(Y)$, et l'on considère l'application de classe D^r

$$\epsilon_U : U \times X \rightarrow Y \quad (X', x) \rightsquigarrow [s_U(X')](x) .$$

Si s_U et s_V sont deux sections locales, le changement de cartes pour le fibré $E_X^r(Y)$ est de la forme

$$\phi_{V,U} : (U \cap V) \times X \rightarrow (U \cap V) \times X \quad (X', x) \rightsquigarrow (X', [s_{V,U}(X')](x))$$

où l'application $s_{V,U}$ de $U \cap V$ dans $Aut^r(X)$ est caractérisée par

$$s_U(X') = s_V(X') \circ s_{V,U}(X')$$

d'où il vient

$$\epsilon_V \circ \phi_{V,U}(X', x) = [s_V(X') \circ s_{V,U}(X')](x) = [s_U(X')](x) = \epsilon_U(X', x) .$$

Les applications ϵ_U se recollent donc en une application ϵ_X^r de classe D^r de $E_X^r(Y)$ dans Y , dont la restriction à la fibre de $E_X^r(Y)$ en un point X' de $H_X^r(Y)$ est un plongement d'image X' .

Pour tout élément f de $D^s(B, H_X^r(Y))$, le fibré image réciproque $f^*E_X^r(Y)$ appartient à $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ et l'application composée

$$f^*E_X^r(Y) \longrightarrow E_X^r(Y) \xrightarrow{\epsilon_X^r} Y$$

définit un plongement ϵ_f de $f^*E_X^r(Y)$ dans le fibré trivial $B \times Y$, dont la restriction à la fibre de $f^*E_X^r(Y)$ en un point b de B est un plongement d'image la sous-variété $f(b)$.

Théorème 4.9.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Etant donné une variété banachique B de classe C^s , l'application ϵ qui à toute application f de classe D^s de B dans $H_X^r(Y)$ associe la classe d'équivalence du plongement ϵ_f du fibré image réciproque $f^*E_X^r(Y)$ dans le fibré trivial $B \times Y$ est une bijection de l'ensemble $D^s(B, H_X^r(Y))$ sur l'ensemble $K_X^{r,s}(B \times Y)$.

Soit E un fibré élément de $D_B^{r,s}(X)$ et g un plongement de E dans $B \times Y$. Pour tout point b de B , la restriction de f à la fibre de E au point b est un plongement dont l'image est une sous-variété de classe C^r de Y , difféomorphe à X , donc un élément de $H_X^r(Y)$, que nous noterons $\bar{g}(b)$. L'application ensembliste $\bar{g}$ de B dans $H_X^r(Y)$ ainsi définie est de classe D^s : relativement à une carte locale (U, ϕ) du fibré E , le plongement g s'écrit sous la forme

$$U \times X \rightarrow U \times Y \quad (b, x) \mapsto (b, g_U(b, x))$$

où g_U est une application $t_{D(r,s)}$ fois partiellement continûment différentiable qui définit donc une application $\bar{g}_U$ de classe D^s de U dans $Pl^r(X, Y)$; la relation $\bar{g}|_U = \pi \bar{g}_U$, entraîne alors que $\bar{g}$ est de classe D^s . Deux plongements équivalents g et g' ayant même image, les applications $\bar{g}$ et $\bar{g}'$ associées coïncident. Nous avons donc défini une application de $K_X^{r,s}(B \times Y)$ dans $D^s(B, H_X^r(Y))$ qui est l'application inverse de l'application ϵ : on a clairement $\bar{\epsilon}_f = f$ et les plongements g et ϵ_g ayant même image sont équivalents d'après le lemme 4.7 $\square$

Soit X un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme de sous-variétés compactes de classe C^r de Y . Nous avons déjà remarqué que l'on a la décomposition suivante de $H^r(Y)$ en sous-variétés ouvertes :

$$H^r(Y) = \bigsqcup_{X \in X} H_X^r(Y) .$$

Les espaces fibrés $E_X^r(Y)$ de base $H_X^r(Y)$, avec X élément de X , définissent donc un espace fibré de classe D^r , d'espace total

$$E^r(Y) = \coprod_{X \in X} E_X^r(Y)$$

de base $H^r(Y)$, de fibre non constante, et les applications ϵ_X^r , avec X élément de X , définissent une application ϵ^r de classe D^r de $E^r(Y)$ dans Y .

Soit B une variété banachique de classe C^S et $\{B_i\}_{i \in I}$ l'ensemble de ses composantes connexes. Nous poserons

$$K^{r,S}(B \times Y) = \prod_{i \in I} \coprod_{X \in X} K_X^{r,S}(B_i \times Y)$$

l'ensemble des fibrés de classe $D^{r,S}$, de base B , de fibre compacte non nécessairement constante sur B , plongés dans le fibré trivial $B \times Y$. On a alors :

Corollaire 4.10.- Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Etant donné une variété banachique B de classe C^S , l'application ϵ qui à toute application f de classe D^S de B dans $H^r(Y)$ associe la classe d'équivalence du plongement ϵ_f du fibré image réciproque $f^*E^r(Y)$ dans le fibré trivial $B \times Y$, défini par l'application composée

$$f^*E^r(Y) \rightarrow E^r(Y) \xrightarrow{\epsilon^r} Y,$$

est une bijection de l'ensemble $D^S(B, H^r(Y))$ sur l'ensemble $K^{r,S}(B \times Y)$.

Corollaire 4.11.- Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Etant donné une variété banachique B de classe C^r , il y a une correspondance biunivoque entre les applications de classe D^r de B dans $H^r(Y)$ et les sous-variétés M de classe C^r de $B \times Y$ telles que la restriction à M de la projection q de $B \times Y$ sur B soit une submersion surjective de fibres compactes ; cette correspondance est décrite de la manière suivante : à une sous-variété M on associe l'application f définie par

$$f(b) = M \cap q^{-1}(b) .$$

Ce corollaire repose sur l'identification de $K^{r,r}(B \times Y)$ avec l'ensemble H des sous-variétés M de classe C^r de $B \times Y$ telles que la restriction à M de la projection de $B \times Y$ sur B soit une submersion surjective de fibres compactes.

L'espace total d'un fibré (E, p, B) de classe $D^{r,r}$ étant une variété de classe C^r , son image par un plongement dans $B \times Y$ est une sous-variété de classe C^r et la restriction à cette sous-variété de la projection de $B \times Y$ sur B , qui s'identifie à la projection p du fibré, est une submersion surjective de fibres compactes. Deux plongements étant équivalents si et seulement si ils ont même image, nous avons ainsi identifié l'ensemble $K^{r,r}(B \times Y)$ à un sous-ensemble de H .

L'ensemble H sera égal à $K^{r,r}(B \times Y)$ si pour tout élément M de H , le triple (M, q_M, B) , où q_M est la restriction à M de la projection q de $B \times Y$ sur B , définit un élément de $\underline{D}_B^{r,r}$, c'est-à-dire si q_M est une fibration localement triviale de classe C^r . Cela résulte directement du théorème 0.7 si l'on sait que M admet une application exponentielle, ce qui est le cas lorsque B est paracompacte et de dimension finie. Dans le cas général, on peut faire le raisonnement suivant. Soit (E, D, ξ) un voisinage tubulaire de classe C^r de la sous-variété compacte $M_0 = M \cap q^{-1}(b_0)$ dans Y . On considère dans le fibré $E \times B$ la sous-variété M' de classe C^r ensemble des points (v, b) tels que v appartienne à D et que $(b, \xi(v))$ appartienne à M . D'après le lemme 0.8, il existe un voisinage U de b_0 dans B et une application $\bar{\phi}$ de classe C^r

$$\bar{\phi} : M_0 \times U \rightarrow D \times U \quad (x, b) \mapsto (\phi(x, b), b)$$

qui soit un difféomorphisme de classe C^r sur $M'_U = M' \cap E \times U$. On en déduit une application fibrée de classe C^r

$$U \times M_0 \rightarrow M \subset B \times Y \quad (b, x) \rightsquigarrow (b, \xi \circ \phi(x, b))$$

qui est un difféomorphisme local en tous points de $\{b_0\} \times M_0$; M_0 étant compact, on peut réduire U de telle manière que cette application soit une carte locale de M $\square$

Le théorème 4.9 identifie l'ensemble $D^S(B, H_X^r(Y))$ des applications de classe D^S d'une variété banachique B dans une variété de sous-variétés compactes $H_X^r(Y)$ à l'ensemble $K_X^{r,s}(B \times Y)$ des fibrés éléments de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ plongés dans le fibré trivial $B \times Y$. Réciproquement, F étant un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,r}(Y)$ peut on identifier l'ensemble $K_X^{r,s}(F)$ des fibrés éléments de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ plongés dans F avec un ensemble d'applications dérivables de source B ?

Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle, U un ouvert d'un espace de Banach et g une application de classe C^r de $U \times Y$ dans Y telle que pour tout point b de U l'application $g^b = g(b, \cdot)$ de Y dans lui même soit un difféomorphisme. Etant donné une variété compacte X de classe C^r , on associe à g l'application

$$g_X : U \text{Pl}^r(X, Y) \rightarrow \text{Pl}^r(X, Y) \quad (b, f) \rightsquigarrow f \circ g^b$$

qui est de classe D^r puisque g_X admet la factorisation suivante par des applications de classe D^r :

$$X \times U \times \text{Pl}^r(X, Y) \xrightarrow{1_U \times \text{ev}} U \times Y \xrightarrow{g} Y.$$

Cette application g_X passe au quotient en une application de $U \times H_X^r(Y)$ dans $H_X^r(Y)$ qui est de classe D^r puisque la projection π de $\text{Pl}^r(X, Y)$ sur $H_X^r(Y)$ admet des sections locales de classe D^r ; en particulier, tout difféomorphisme g de classe C^r de Y induit un difféomorphisme $H_X^r(g)$ de classe D^r de $H_X^r(Y)$ (cela résulte aussi directement du théorème 1.3). Si H est un sous-groupe du groupe $\text{Aut}^r(Y)$ des difféomorphismes de classe C^r de Y , il s'identifie donc à un sous-groupe du groupe $\text{Aut}^r(H_X^r(Y))$ des difféomorphismes de classe D^r de $H_X^r(Y)$.

Soit F un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,r}(Y, H)$. Les changements de cartes pour un atlas de ce fibré sont de la forme :

$$\phi_{V,U} : (U \cap V) \times Y \rightarrow (U \cap V) \times Y \quad (b, y) \rightsquigarrow (b, f_{V,U}(b, y))$$

où $f_{V,U}$ est une application de classe C^r de $(U \cap V) \times Y$ dans Y telle que pour tout point b de $U \cap V$ l'application $f_{V,U}^b = f_{V,U}(b, \cdot)$ appartienne à H ; il résulte de l'étude précédente que l'application

$$(U \cap V) \times H_X^r(Y) \rightarrow (U \cap V) \times H_X^r(Y) \quad (b, X') \rightsquigarrow (b, H_X^r(f_{V,U}^b)(X'))$$

est de classe D^r et que $H_X^r(f_{V,U}^b)$ appartient au sous-groupe H de $\text{Aut}^r(H_X^r(Y))$. On peut donc associer au fibré F un fibré $H_X^r(F)$ de base B , de fibre $H_X^r(Y)$ et de groupe H , que nous dirons encore de classe $D^{r,r}$ par une extension naturelle de la définition 4.1. La fibre $H_X^r(F)_b$ de $H_X^r(F)$ en un point b de B s'identifie à la variété des sous-variétés compactes de classe C^r difféomorphes à X de la fibre F_b de F en b .

Théorème 4.12.- Soient X une variété compacte de classe C^r , Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle et F un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,r}(Y)$. Il existe une correspondance biunivoque entre l'ensemble $D^S(H_X^r(F))$ des sections de classe D^S du fibré $H_X^r(F)$ et l'ensemble $K_X^{r,s}(F)$ des fibrés éléments de $\underline{D}_B^{r,s}(X)$ plongés dans F ; cette correspondance est décrite de la manière suivante : à un plongement f de E dans F on associe la section s qui à un point b de B associe la sous-variété de F_b image par f de la fibre E_b de E en b .

La section ensembliste s associée à un plongement f est entièrement déterminée par la classe d'équivalence du plongement et cette section est de classe D^S . En effet, relativement à une carte locale de F au-dessus d'un ouvert U de B , la section $s|_U$ est représentée par l'application s_U de U dans $H_X^r(Y)$ correspondant au plongement de $E|_U$ dans $F|_U$ et cette application est de classe D^S d'après le théorème 4.9.

Réciproquement, soit s une section de classe D^S du fibré $H_X^r(F)$. Relativement à une carte locale de F au dessus d'un ouvert U de B , le représentant s_U de $s|U$ est de classe D^S et il correspond d'après le théorème 4.9 à un plongement f_U d'un fibré E_U élément de $\underline{D}_U^{r,S}(X)$ dans le fibré $F|U$. Si f_U et f_V sont deux plongements de ce type, le plongement f_U restreint à $E_U|U \cap V$ et le plongement f_V restreint à $E_V|U \cap V$ ont même image dans $F|U \cap V$ et ils sont donc équivalents d'après le lemme 4.7. On peut donc recoller les fibrés E_U en un fibré E élément de $\underline{D}_B^{r,S}(X)$ et les plongements f_U en un plongement f de E dans F , plongement dont la section associée est s $\square$

Définition 4.13. - Soit F un espace fibré élément de $\underline{D}_B^{r,S}$. Etant donné une variété compacte X de classe C^r et un sous-groupe G du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X , nous noterons $K_{X,G}^{r,S}(F)$ la classe des plongements d'un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,S}(X,G)$ dans F , modulo la relation d'équivalence suivante : deux plongements $f : E \rightarrow F$ et $f' : E' \rightarrow F$ sont G -équivalents s'il existe un G -isomorphisme h de E' sur E , c'est-à-dire un isomorphisme au sens de la catégorie $\underline{D}_B^{r,S}$ dont la restriction à toute fibre est un élément de G , tel que $f' = foh$. Un élément de $K_{X,G}^{r,S}(F)$ sera appelé un fibré élément de $\underline{D}_B^{r,S}(X,G)$ plongé dans F .

Soient X une variété compacte de classe C^r , G un sous-groupe de classe D^r du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Nous supposons que l'action de G sur $\text{Aut}^r(X)$ définit une fibration localement triviale de classe D^r de $\text{Aut}^r(X)$ sur l'espace homogène à droite $\text{Aut}^r(X)/G$. Le groupe $\text{Aut}^r(X)$ opère à gauche sur $\text{Aut}^r(X)/G$ et l'on considère l'espace fibré $H_{X,G}^r(Y)$ de base $H_X^r(Y)$, de fibre $\text{Aut}^r(X)/G$ et de groupe structural $\text{Aut}^r(X)$ associé au fibré principal $(Pl^r(X,Y), \pi, H_X^r(Y))$. La projection π de $Pl^r(X,Y)$ sur

$H_X^r(Y)$ se factorise alors en une application π_G de classe D^r de $Pl^r(X,Y)$ sur $H_{X,G}^r(Y)$ et le triple $(Pl^r(X,Y), \pi_G, H_{X,G}^r(Y))$ est naturellement muni d'une structure d'espace fibré principal de classe D^r , de groupe structural G . Pour justifier ce point, on choisit un recouvrement ouvert U de $H_X^r(Y)$ et une famille de sections locales $\{s_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ de classe D^r définissant un atlas du fibré $(Pl^r(X,Y), \pi, H_X^r(Y))$ dont les fonctions de transition sont les applications $s_{U',U}$ de $U' \cap U$ dans $Aut^r(X)$ caractérisées par $s_U = s_{U'} \cdot s_{U',U}$; on choisit de même un recouvrement ouvert V de $Aut^r(X)/G$ et une famille de sections locales $\{\sigma_V\}_{V \in \mathcal{V}}$ de classe D^r définissant un atlas du fibré principal $(Aut^r(X), \chi, Aut(X)/G)$ dont les fonctions de transition sont les applications $\sigma_{V',V}$ de $V' \cap V$ dans G caractérisées par $\sigma_V = \sigma_{V'} \cdot \sigma_{V',V}$; si f est un élément de $Aut^r(X)$ et $\bar{h}$ un élément de V tels que le translaté $f.\bar{h}$ de $\bar{h}$ par f soit encore dans V , les éléments $\sigma_V(f.\bar{h})$ et $f \circ \sigma_V(\bar{h})$ de $Aut^r(X)$ ont même classe modulo G et, l'application de prise de l'inverse étant de classe D^r , il existe une application θ_V de classe D^r d'un ouvert de $Aut^r(X) \times V$ dans G telle que

$$\sigma_V(f.\bar{h}) \circ \theta_V(f, \bar{h}) = f \circ \sigma_V(\bar{h}) .$$

On définit alors une carte locale de $(Pl^r(X,Y), \pi_G, H_{X,G}^r(Y))$ par

$$U \times V \times G \rightarrow Pl^r(X,Y) \quad (X', \bar{h}, g) \rightsquigarrow s_U(X') \circ \sigma_V(\bar{h}) \circ g$$

et les changements de cartes ont la forme

$$U \times V \times G \rightarrow U' \times V' \times G \quad (X', \bar{h}, g) \rightsquigarrow (X', s_{U',U}(X') . \bar{h}, \theta_{V'}(s_{U',U}(X'), \bar{h}) \circ \sigma_{V',V}(\bar{h}) \circ g)$$

où les fonctions de transition $\sum_{U',V';U,V}$ définies par

$$\sum_{U',V';U,V}(\bar{X}, \bar{h}) = \theta_{V'}(s_{U',U}(X'), \bar{h}) \circ \sigma_{V',V}(\bar{h})$$

sont de classe D^r et prennent leurs valeurs dans G . Le groupe G opérant à gauche sur X , on forme l'espace fibré $E_{X,G}^r(Y)$ de base $H_{X,G}^r(Y)$ de fibre X et de groupe structural G associé au fibré principal $(Pl^r(X,Y), \pi_G, H_{X,G}^r(Y))$. Le morphisme de fibrés de classe D^r

$$\begin{array}{ccc} Pl^r(X,Y) & \xlongequal{\quad} & Pl^r(X,Y) \\ \downarrow \pi_G & & \downarrow \pi \\ H_{X,G}^r(Y) & \xrightarrow{\quad} & H_X^r(Y) \end{array}$$

qui s'exprime en coordonnées locales par

$$U \times V \times G \rightarrow U \times \text{Aut}^r(X) \quad (X', \bar{h}, g) \rightsquigarrow (X', \sigma_V(\bar{h}) \circ g)$$

définit un morphisme de fibrés de classe D^r

$$\begin{array}{ccc} E_{X,G}^r(Y) & \xrightarrow{\quad} & E_X^r(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_{X,G}^r(Y) & \xrightarrow{\quad} & H_X^r(Y) \end{array}$$

d'expression locale

$$U \times V \times X \rightarrow U \times X \quad (X', \bar{h}, x) \rightsquigarrow (X', [\sigma_V(\bar{h})](x))$$

qui identifie le fibré $E_{X,G}^r(Y)$ au fibré image réciproque du fibré $E_X^r(Y)$ par la projection de $H_{X,G}^r(Y)$ sur $H_X^r(Y)$.

Théorème 4.14.- Soient X une variété compacte de classe C^r , G un sous-groupe de classe D^r du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X , Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Si l'action de G sur $\text{Aut}^r(X)$ définit une fibration localement triviale de classe D^r de $\text{Aut}^r(X)$ sur l'espace homogène à droite $\text{Aut}^r(X)/G$, l'application

ε qui à toute application f de classe D^S d'une variété B de classe C^S dans $H_{X,G}^r(Y)$ associe la classe de G -équivalence du plongement ε_f du fibré image réciproque $f^*E_{X,G}^r(Y)$ dans le fibré trivial $B \times Y$, défini par l'application composée

$$f^*E_{X,G}^r(Y) \longrightarrow E_{X,G}^r(Y) \longrightarrow E_X^r(Y) \xrightarrow{\varepsilon_X^r} Y$$

est une bijection de l'ensemble $D^S(B, H_{X,G}^r(Y))$ sur l'ensemble $K_{X,G}^{r,S}(B \times Y)$.

Soit E un fibré élément de $\underline{D}_{\mathbb{B}}^{r,S}(X,G)$ et g un plongement de E dans $B \times Y$. Relativement à une carte locale (U, ϕ) du fibré E , le plongement g s'écrit sous la forme

$$U \times X \rightarrow U \times Y \quad (b, x) \mapsto (b, \tilde{g}_U(b, x))$$

où $\tilde{g}_U$ est une application $t_{D(r,s)}$ fois partiellement continûment différentiable qui définit donc une application g_U de classe D^S de U dans $Pl^r(X, Y)$. Si (U', ϕ') est une autre carte locale et si le changement de cartes est défini par l'application $\gamma_{U', U}$ de $U' \cap U$ dans G , on a

$$g_{U'}(b) \circ \gamma_{U', U}(b) = g_U(b)$$

pour tout point b de $U' \cap U$. Les applications $\bar{g}_U = \pi_G \circ g_U$ de U dans $H_{X,G}^r(Y)$ se recollent donc en une application $\bar{g}$ de classe D^S de B dans $H_{X,G}^r(Y)$.

Si g et g' sont deux plongements G -équivalents, il existe un G -isomorphisme h de E' dans E tel que $g' = goh$; relativement à des cartes (U, ϕ) et (U, ϕ') de E et de E' , le morphisme h définit une application h_U de classe D^r de U dans G telle que l'on ait

$$g'_U(b) = g_U(b) \circ h_U(b)$$

pour tout point b de U . On a donc $\bar{g}'_U = \bar{g}_U$, d'où $\bar{g}' = \bar{g}$. Nous avons donc défini une application de $K_{X,G}^{r,S}(B \times Y)$ dans $D^S(B, H_{X,G}^r(Y))$ qui est l'application inverse de l'application ε . Montrons d'abord que si f est une appli-

cation de classe D^S de B dans $H_{X,G}^r(Y)$, on a $f(b) = \overline{\epsilon_f}(b)$ pour tout point b de B . Soit β un plongement de X dans Y tel que $\pi_G(\beta) = f(b)$. On choisit une section locale s_U de π au point $X' = \pi(\beta)$ telle que $s_U(X') = \beta$ et une section locale σ_V de χ en l'élément neutre e . Relativement à la carte locale de $E_{X,G}^r(Y)$ associée à ces sections, $f(b)$ est le point $(X', \bar{e})$ et le plongement ϵ_f qui est induit par l'application composée

$$E_{X,G}^r(Y) \rightarrow E_X^r(Y) \xrightarrow{\epsilon_X^r} Y$$

d'expression locale

$$U \times V \times X \rightarrow Y \quad (X', \bar{h}, x) \rightsquigarrow [s_U(X') \circ \sigma_V(\bar{h})](x)$$

coïncide avec β sur la fibre au point $f(b)$; on a donc bien $\overline{\epsilon_f}(b) = f(b)$.

Montrons maintenant que si g est un plongement de E dans $B \times Y$, le plongement

$\epsilon_{\bar{g}}$ lui est G -équivalent. Soit ϖ_G la projection de $H_{X,G}^r(Y)$ sur $H_X^r(Y)$.

D'après le théorème 3.9, le fibré E considéré comme élément de $\underline{D}_B^{r,S}(X)$ s'identifie à l'image réciproque du fibré $E_X^r(Y)$ par l'application $\bar{w}_G \circ \bar{g}$; comme le fibré $E_{X,G}^r(Y)$ est l'image réciproque de $E_X^r(Y)$ par ϖ_G , il en résulte que E s'identifie à l'image réciproque de $E_{X,G}^r(Y)$ par $\bar{g}$ et, $E_{X,G}^r(Y)$ étant un fibré de groupe structural G , cette identification est une G -équivalence $\square$

CHAPITRE IV

Ce chapitre est consacré à une application de la théorie de dérivabilité, application faisant jouer un rôle essentiel à certains résultats propres à cette théorie : la caractérisation des applications de classe D^S de but une chaîne d'espaces de sections d'un espace fibré vectoriel (Th. II.1.9) et ses conséquences, l'existence de structures dérivables sur des espaces fonctionnels n'admettant pas de structure différentiable ($\text{Aut}^r(X)$, $H^r(Y)$, etc, pour r fini).

Les résultats concrets ("smoothing" d'une submersion propre, d'un fibré de Steenrod) sont donnés au §3 ; les §1 et 2 en sont la préparation.

Au §1 ; le théorème d'approximation d'une application continue par une application différentiable est étendu au cas dérivable ; les propriétés formelles de la théorie de dérivabilité étant celles de la théorie de différentiabilité, la démonstration donnée ici est l'adaptation sans grande modification de la démonstration classique telle qu'on la trouve par exemple dans [1]. Afin de tirer tout le parti possible de ce théorème, il a semblé utile de raffiner la notion de variété dérivable : l'idée est de formaliser la situation qui fait par exemple de la variété $C^r(X,Y)$ de classe D^r l'aboutissement de la suite $\{C^t(X,Y)\}_{t=0}^r$ de variétés dérivables et de chercher alors à approcher une application continue de but $C^0(X,Y)$ par une application de classe D^r de but $C^r(X,Y)$ (problème élémentaire dans ce cas particulier).

Au §2 on est amené à regretter de n'avoir pas (encore) un théorème exprimant que l'action sur le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte d'un sous-groupe de classe D^r définit une fibration principale de classe D^r . A défaut d'un théorème général on montre que ce résultat est vrai pour des sous-groupes particuliers : le sous-groupe des difféomorphismes laissant fixe une sous-variété fermée, le sous-groupe des difféomorphismes laissant globalement

invariante une sous-variété fermée, un sous-groupe qui est un groupe de Lie. Ces cas particuliers ont été choisis en fonction des applications que l'on veut donner au §3.

§ 1 - UN THEOREME D'APPROXIMATION.

Définition 1.1. - Nous dirons qu'une chaîne d'espaces de Banach $\{E^k\}_{k=0}^r$ admet une donnée d'approximation dérivable s'il existe une famille $\{\alpha^\lambda\}_{\lambda \in]0,1]}$ d'applications linéaires continues de E^0 dans E^r telle que l'on ait les propriétés suivantes :

(1) l'application α de $]0,1] \times E^0$ dans E^r définie par $\alpha(\lambda, x) = \alpha^\lambda(x)$ est de classe D^r relativement à $]0,1] \times E^0$ banachique et à la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$;

(2) pour tout s vérifiant $0 \leq s \leq r$, l'application $\bar{\alpha}^s$ de $[0,1] \times E^s$ dans E^s définie par $\bar{\alpha}^s(\lambda, x) = i^{s,r} \alpha^\lambda o i^{0,s}$ pour λ différent de zéro et $\bar{\alpha}^s(0, x) = x$ est de classe D^s relativement à $[0,1] \times \{E^\ell\}_{\ell=0}^s$ et à $\{E^\ell\}_{\ell=0}^s$.

Lemme 1.2. - Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de base compacte. La chaîne $\{C^k(E)\}_{k=0}^r$ des sections E admet une donnée d'approximation dérivable.

On reprend les notations du lemme II.1.5.

Soit α_i l'application de $]0,1] \times C^0(K_i, F_i)$ dans $C^r(K'_i, E_i)$ définie par $\alpha_i(\lambda, s_i) = \alpha_i^\lambda(s_i)$; l'application α admet alors la factorisation suivante :

$$\alpha :]0,1] \times C^0(E) \xrightarrow{i_1 \times \rho^0}]0,1] \times \prod_{i=1}^n C^0(K_i, F_i) \xrightarrow{\prod_{i=1}^n \alpha_i} \prod_{i=1}^n C^r(K'_i, E_i) \xrightarrow{\sigma^r} C^r(E)$$

qui montre que α est de classe D^r si α_i est de classe D^r , ce qui est équivalent d'après le théorème II.1.9 à $\tilde{\alpha}_i$ de classe C^r . Pour pouvoir conclure il faut choisir convenablement les fonctions θ_i^λ avec lesquelles on pratique la convolution. Soit θ une fonction numérique d'une variable réelle, de classe C^∞ , de support contenu dans $[0,1]$, d'intégrale égale à 1. On pose

$$\theta_i^\lambda(x) = \theta_i^\lambda(x^1, \dots, x^{v_i}) = \frac{1}{(\lambda \varepsilon_i)^{v_i}} \theta\left(\frac{x^1}{\lambda \varepsilon_i}\right) \times \dots \times \theta\left(\frac{x^{v_i}}{\lambda \varepsilon_i}\right) ;$$

l'application θ_i définie sur $]0,1] \times \mathbb{R}^{v_i}$ par $\theta_i(\lambda, x) = \theta_i^\lambda(x)$ est de classe C^∞ . Il en résulte que l'application

$$K_i \times K_i' \times]0,1] \rightarrow \mathbb{R} \quad (y, x, \lambda) \rightsquigarrow \theta_i^\lambda(x-y)$$

est de classe C^∞ , donc que l'application

$$\theta_i : K_i' \times]0,1] \rightarrow C^\infty(K_i, \mathbb{R}) \hookrightarrow C^0(K_i, \mathbb{R}) \quad (x, \lambda) \rightsquigarrow \{y \rightsquigarrow \theta_i^\lambda(x-y)\}$$

est de classe C^∞ . L'application $\tilde{\alpha}_i$ admet alors la factorisation suivante :

$$K_i' \times]0,1] \times C^0(K_i, F_i) \xrightarrow{\theta_i \times \text{id}} C^0(K_i, \mathbb{R}) \times C^0(K_i, F_i) \xrightarrow{\Phi} C^0(K_i, F_i) \xrightarrow{I} F_i$$

où Φ est l'application bilinéaire continue induite par le produit de $\mathbb{R} \times F_i$ dans F_i et I est l'application linéaire continue définie par $I(f) = \int_{K_i} f(y) dy$ donc $\tilde{\alpha}_i$ est de classe C^∞ .

Soit maintenant $\tilde{\alpha}_i^{-h}$ l'application de $[0,1] \times C^h(K_i, F_i)$ dans $C^h(K_i', F_i)$ définie par $\tilde{\alpha}_i^{-h}(\lambda, s_i) = \alpha_i^\lambda(s_i)$ pour λ différent de zéro et $\tilde{\alpha}_i^{-h}(0, s_i) = \rho_i'(s_i)$; l'application $\tilde{\alpha}^{-h}$ admet alors la factorisation suivante :

$$\tilde{\alpha}^{-h} : [0,1] \times C^h(E) \xrightarrow{\text{id} \times \rho^h} [0,1] \times \prod_{i=1}^n C^h(K_i, F_i) \xrightarrow{\prod_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i^{-h}} \prod_{i=1}^n C^h(K_i', F_i) \xrightarrow{\sigma'^h} C^h(E)$$

qui montre que $\tilde{\alpha}^{-h}$ est de classe D^h si $\tilde{\alpha}_i^{-h}$ est de classe D^h , c'est-à-dire par le théorème II.1.14 si l'application $\tilde{\alpha}_i^{-h}$ est de classe D^h . Pour λ différent de zéro on a

$$\tilde{\alpha}_i^{-h}(x, \lambda, s_i) = \int_{\mathbb{R}^{v_i}} \theta_i^\lambda(y) s_i(x-y) dy$$

d'où, par le changement de variable $z = \frac{y}{\lambda \varepsilon_i}$

$$\tilde{\alpha}_i^{-h}(x, \lambda, s_i) = \int_{\mathbb{R}^{v_i}} \theta(z^1) \times \dots \times \theta(z^{v_i}) s_i(x - \lambda \varepsilon_i z) dz,$$

expression qui reste valable pour $\lambda=0$. L'application $\tilde{\alpha}_i^{-h}$ admet donc

La factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc}
 K_i^! \times [0,1] \times C^h(K_i, F_i) & \longrightarrow & C^h(I_i^{v_i}, F_i) \\
 & \searrow & \downarrow J \\
 & & F_i
 \end{array}
 \quad (x, \lambda, s_i) \rightsquigarrow \{z \rightsquigarrow s_i(x - \lambda \epsilon_i z)\}$$

où l'application linéaire J définie par

$$J(f) = \int_{\mathbb{R}} \theta(z^1) \times \dots \times \theta(z^{v_i}) f(z) dz ,$$

qui admet une extension continue sur $C^0(I, F_i)$, est de classe D^h et où la flèche horizontale est de classe D^h puisque son application tilda admet une factorisation par des applications de classe D^h :

$$\begin{array}{ccc}
 I_i^{v_i} \times K_i^! \times [0,1] \times C^h(K_i, F_i) & \longrightarrow & K_i \times C^h(K_i, F_i) \xrightarrow{\text{ev}} F_i \\
 (z, x, \lambda, s_i) & \rightsquigarrow & (x - \lambda \epsilon_i z, s_i) \quad \square
 \end{array}$$

Lemme 1.3.- Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Soit A un compact contenu dans un ouvert V tel que $\bar{V} \subset U$. Soit $\{E^k\}_{k=0}^r$ une chaîne d'espaces de Banach admettant une donnée d'approximation dérivable. Soit f une application de $[0,1] \times U$ dans E^s , de classe $D^{s'}$ relativement à la chaîne $\{E^\ell\}_{\ell=0}^s$ (avec $0 \leq s' \leq s \leq r \leq +\infty$) . Il existe une application $\bar{f}$ de $[0,1] \times U$ dans E^s , de classe $D^{s'}$, vérifiant les propriétés suivantes :

- (0) les applications f et $\bar{f}$ ont même restriction sur $\{0\} \times U$;
- (1) il existe un voisinage 0 de A tel que $\bar{f}|[0,1] \times 0$ se factorise par E^r en une application de classe D^r relativement à la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$
- (2) $\bar{f}$ est égale à f en dehors de $[0,1] \times V$;
- (3) si Ω est un ouvert tel que $f|[0,1] \times \Omega$ se factorise par E^r en une application de classe D^r , l'application $\bar{f}|[0,1] \times \Omega$ possède la même propriété.

On suppose $\bar{V}$ compact, quite à restreindre V . Soit W un ouvert contenant A tel que $\bar{W} \subset V$. Soit ψ une fonction numérique de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^m$ égale à 1 dans un voisinage O de A et à 0 hors de W . Soit g l'application de $\mathbb{R}^m$ dans E^S définie par $g(x) = \psi(x) \times f(0, x)$ pour x élément de U et $g(x) = 0$ autrement : cette application est de classe $D^{S'}$.

Soit θ une fonction numérique d'une variable réelle, de classe C^∞ , de support contenu dans $[0, 1]$, d'intégrale égale à 1 et soit $\{\alpha^\lambda\}_{\lambda \in [0, 1]}$ une famille d'approximation dérivable pour la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$. On définit une application h de $[0, 1] \times \mathbb{R}^m$ dans E^S par

$$\begin{aligned} h(0, x) &= g(x) \\ h(t, x) &= i^{r, S} \circ \alpha^t \left[\int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(\epsilon t)^m} \theta\left(\frac{x^1 - y^1}{\epsilon t}\right) \times \dots \times \theta\left(\frac{x^m - y^m}{\epsilon t}\right) g(y) dy \right] \\ &= i^{r, S} \circ \alpha^t \left[\int_{\mathbb{R}^m} \theta(z^1) \times \dots \times \theta(z^m) g(x - \epsilon t z) dz \right] \end{aligned}$$

où ϵ est choisi inférieur à la distance de W au complémentaire de V .

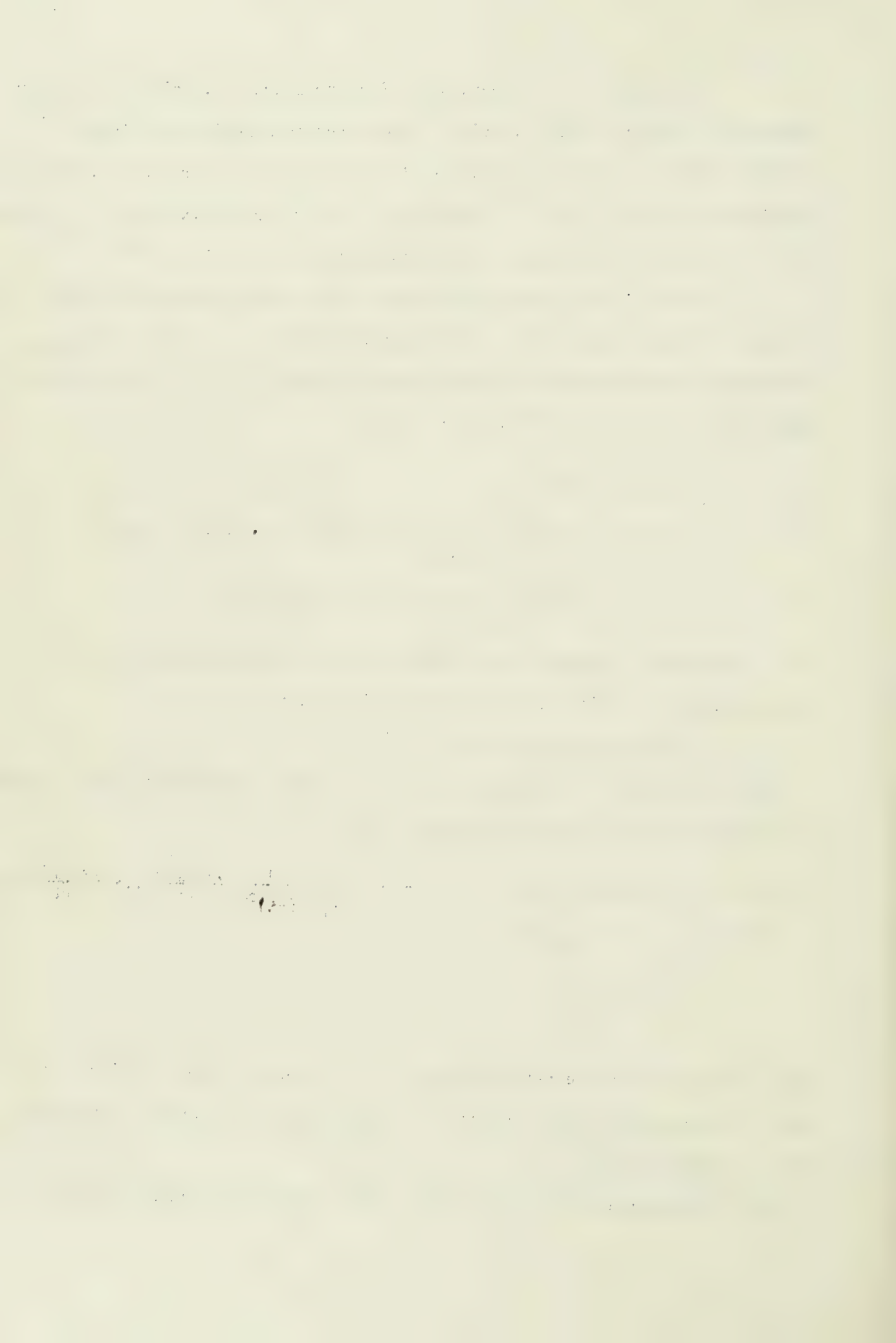
L'application h vérifie les propriétés suivantes :

- (i) h est nulle en dehors de $[0, 1] \times V$;
- (ii) $h|_{[0, 1] \times \mathbb{R}^m}$ se factorise par E^r et cette factorisation est de classe D^r puisqu'elle admet la factorisation suivante

$$\begin{array}{ccc}]0, 1] \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad} &]0, 1] \times E^S \\ & \searrow & \downarrow \alpha^{0, S} \\ & & E^r \end{array} \quad (t, x) \rightsquigarrow \left(t, \int_{\mathbb{R}^m} \frac{1}{(\epsilon t)^m} \theta\left(\frac{x^1 - y^1}{\epsilon t}\right) \times \dots \times \theta\left(\frac{x^m - y^m}{\epsilon t}\right) g(y) dy \right)$$

où la flèche horizontale est de classe C^∞ , g étant au moins continue, et où $\alpha^{0, S}$ est par hypothèse de classe D^r relativement à $]0, 1] \times E^S$ banachique et à la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^r$;

- (iii) l'application h est de classe $D^{S'}$ puisqu'elle admet la factorisation



$$\begin{array}{ccc}
 [0,1] \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\quad} & [0,1] \times E^S \\
 & \searrow & \downarrow \begin{smallmatrix} -s \\ \alpha \end{smallmatrix} \\
 & & E^S
 \end{array}
 \quad (t,x) \rightsquigarrow (t, \int_{\mathbb{R}^m} \theta(z^1) \times \dots \times \theta(z^m) g(x - \epsilon t z) dz) \\
 = (t, \bar{g}(t,x))$$

où la flèche horizontale est de classe $D^{s'}$ puisque g est de classe $D^{s'}$ (quel que soit u vérifiant $0 \leq u \leq s'$ on a

$$i^{s-u, s-\bar{\alpha}} g(t,x) = \int_{\mathbb{R}^m} \theta(z^1) \times \dots \times \theta(z^m) i^{s-u, s} g(x - \epsilon t z) dz ,$$

ce qui entraîne que $i^{s-u, s-\bar{\alpha}} g$ est de classe C^u puisque $i^{s-u, s} g$ est de classe C^u) et où $\bar{\alpha}^s$ est par hypothèse de classe D^s relativement aux chaînes $[0,1] \times \{E^\ell\}_{\ell=0}^s$ et $\{E^\ell\}_{\ell=0}^s$.

On pose

$$\bar{f}(t,x) = (1-\psi(x))f(t,x) + h(t,x) ;$$

la vérification de (0), (1), (2) et (3) est immédiate $\square$

Lemme 1.4.- Les hypothèses et les données étant celles du lemme 3 , soit $\{\phi_k\}$ une famille finie de fermés de U et soit $\{O_k\}$ une famille d'ouverts de E^S telle que l'image de $[0,1] \times \phi_k$ par f soit contenue dans O_k . On peut alors imposer la même condition à l'application $\bar{f}$ dont le lemme 3 assure l'existence.

Soit $\bar{f}$ une application vérifiant les propriétés (0), (1), (2) et (3) du lemme 3. Il est certain a priori que $\bar{f}$ envoie $\{0\} \times \phi_k$ et $[0,1] \times ((U - \bar{W}) \cap \phi_k)$ dans O_k . L'application $\bar{f}$ étant continue et $\bar{W} \cap \phi_k$ étant compact, on peut construire sur U une fonction numérique ϵ_k strictement positive, de classe C^∞ , valant 1 à l'extérieur de V et telle que $\bar{f}(t,x)$ appartienne à O_k dès que x appartient à ϕ_k et que t est inférieur ou égal à $\epsilon_k(x)$. Les fonctions ϵ_k étant en nombre fini, il existe une fonction numérique ϵ strictement positive, de classe C^∞ , telle que $\epsilon \leq \inf \epsilon_k$ et l'application

$\bar{f}'$ de $[0,1] \times U$ dans R^m définie par

$$\bar{f}'(t,x) = \bar{f}(\varepsilon(x)t,x)$$

vérifie les propriétés (0), (1) et (3) du lemme 3 et pour tout indice k envoie $[0,1] \times \phi_k$ dans O_k .

Définition 1.5. - Soit X une variété de classe D^r . Un atlas de classe D_s^r , avec $0 \leq s \leq r$, pour X est un atlas $A = \{U_\alpha, \phi_\alpha, \{E_\alpha^k\}_{k=0}^r\}_{\alpha \in A}$ de classe D^r tel que

- (1) pour tout indice α l'ouvert $\phi_\alpha(U_\alpha)$ de E_α^r est de la forme $\Omega_\alpha^s \cap E_\alpha^r$ avec Ω_α^s ouvert de E_α^s ;
- (2) pour tout couple d'indices (α, β) l'ouvert $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ de E_α^r est de la forme $\Omega_{\beta,\alpha}^s \cap E_\alpha^r$ avec $\Omega_{\beta,\alpha}^s$ ouvert de E_α^s ;
- (3) l'application de changement de cartes $\phi_{\beta,\alpha}$ de $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ dans E_β^r possède pour tout t vérifiant $s \leq t \leq r$ une extension $\phi_{\beta,\alpha}^t$ de $\Omega_{\beta,\alpha}^t = \Omega_{\beta,\alpha}^s \cap E_\alpha^t$ dans E_β^t , de classe D^t .

Deux atlas de classe D_s^r sont des atlas équivalents si leur réunion est encore un atlas de classe D_s^r . Une variété X munie d'une classe d'équivalence d'atlas est une variété de classe D_s^r .

Il est clair que si X est une variété de classe D_s^r , on obtient par recollement des Ω_α^t une variété X^t de classe D_s^t , que X^r est isomorphe à X et que l'on a des morphismes d'inclusion

$$X = X^r \hookrightarrow X^{r-1} \hookrightarrow \dots \hookrightarrow X^s.$$

On représentera une telle variété par le symbole $X = \{X^k\}_{k=s}^r$.

Soient $X = \{X^k\}_{k=s}^r$ et $Y = \{Y^k\}_{k=s}^r$ deux variétés de classe D_s^r ; nous dirons qu'une application f de X dans Y est une application de classe D_s^r si pour tout k vérifiant $s \leq k \leq r$, l'application f admet une extension

f^k de X^k dans Y^k , de classe D^k . Les applications de classe D_s^r sont les morphismes d'une catégorie.

Exemples 1.6.1.- Soient X une variété compacte de classe C^r et Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle ; l'atlas canonique sur $C^r(X,Y)$ définit une structure de variété de classe D_0^r .

2.- Soit X une variété compacte de classe C^r ; l'atlas canonique sur $\text{Aut}^r(X)$ définit une structure de groupe de classe D_1^r .

3.- Soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle ; l'atlas canonique sur $H^r(Y)$ définit une structure de variété de classe D_1^r .

4.- Les notions de variétés de classe D^r et de variétés de classe D_r^r coïncident.

5.- Soit X une variété différentiable de classe C^r ; la variété X est naturellement munie d'une structure de variété de classe D_0^r , l'étage X^k étant simplement X munie de sa structure de variété différentiable de classe C^k .

Le théorème d'approximation que nous allons démontrer est relatif à des applications au moins continues de source une variété X de dimension finie et de but l'étage Y^s d'une variété $Y = \{Y^k\}_{k=s}^r$ de classe D_s^r : une telle application peut être approchée, modulo l'inclusion de Y^r dans Y^s , par une application de classe D^r de X dans Y^r . Afin de n'avoir pas à expliciter ce qu'est une "bonne approximation" d'une application f le résultat est exprimé par une homotopie F de f dont la restriction de $]0,1[\times X$ se factorise par Y^r en une application de classe D^r ; une approximation $\bar{f}$ de f est obtenue en choisissant une application ϵ de classe C^r de X dans $]0,1[$ et en posant $\bar{f}(x) = F(\epsilon(x), x)$; la proximité de $\bar{f}$ et de f résulte alors de la con-

tinuité (et de la dérivabilité, lorsque f est dérivable) de l'application F de $[0,1] \times X$ dans Y^S .

Théorème 1.7.- Soit X une variété différentiable de classe C^r , paracompacte et de dimension finie, soit $Y = \{Y^k\}_{k=S}^r$ une variété dérivable de classe D_S^r modelée sur des chaînes admettant des données d'approximation dérivables et soit f une application de classe $D^{S'}$ de X dans Y^S , avec $0 \leq S' \leq S \leq r \leq +\infty$. Il existe une application F de $[0,1] \times X$ dans Y^S , de classe $D^{S'}$, telle que f soit la restriction de F à $\{0\} \times X$ et que la restriction de F à $]0,1] \times X$ se factorise en une application de classe D^r de $]0,1] \times X$ dans Y^r .

Soit $\{U_i\}$ un recouvrement ouvert dénombrable et localement fini de X tel que $\bar{U}_i$ soit contenu dans le domaine U_i d'une carte locale ϕ_i de X et que $f(\bar{U}_i)$ soit contenu dans le domaine O_i^S d'une carte locale ψ_i^S de Y^S . Soit $\{W_i\}$ un recouvrement ouvert de X , $\bar{W}_i$ étant contenu dans un ouvert V_i tel que $\bar{V}_i$ soit un compact contenu dans U_i .

On va construire par récurrence une suite $\{F_n\}_{n=0}^\infty$ d'applications de classe $D^{S'}$ de $[0,1] \times X$ dans Y^S telle que

- (i) la restriction de F_n à $\{0\} \times X$ est égale à f ;
- (ii) la restriction de F_n à $]0,1] \times (W_1 \cup \dots \cup W_n)$ se factorise en une application de classe D^r à valeurs dans Y^r ;
- (iii) pour tout indice i , l'application F_n envoie $[0,1] \times \bar{U}_i$ dans O_i^S .

On commence la récurrence en posant F_0 l'application définie par $F_0(t,x) = f(x)$. On suppose que F_{n-1} existe et l'on considère l'application $G_{n-1} = \psi_n^S \circ F_{n-1} \circ (\text{id} \times \phi_n^{n-1})$ qui envoie $[0,1] \times \phi_n(\bar{U}_n)$ dans l'ouvert $\psi_n^S(O_n^S)$ de E_n^S . On applique le lemme 4 pour obtenir une application G_n de $[0,1] \times \phi_n(U_n)$ dans E_n^S , égale à G_{n-1} à l'extérieur de $[0,1] \times \phi_n(V_n)$, dont la restriction à $]0,1] \times \phi_n(W_n)$ se factorise par E_n^r en une application de classe D^r et qui

pour tout indice i envoie $[0,1] \times \phi_n(\bar{U}_i \cap \bar{V}_n)$ dans $\psi_n^S(\mathcal{O}_i^S \cap \mathcal{O}_n^S)$ (comme $\bar{V}_n$ est compact et que le recouvrement $\{U_i\}$ est localement fini, les fermés $\phi_i = \bar{U}_i \cap \bar{V}_n$ non vides sont en nombre fini). On définit alors une application F_n de $[0,1] \times X$ dans Y^S par

$$F_n(t,x) = F_{n-1}(t,x) \quad \text{à l'extérieur de } [0,1] \times \bar{V}_n$$

$$F_n(t,x) = (\psi_n^S)^{-1} \circ G_n \circ (\text{id} \times \phi_n) \quad \text{sur } [0,1] \times U_n$$

La vérification de (i) et (iii) est immédiate ; (ii) résulte de ce que G_n se factorise par E_n^r en une application de classe D^r sur tout ouvert où G_{n-1} admet déjà une telle factorisation.

L'application F cherchée est la limite des applications F_n : cette limite existe et elle possède les propriétés requises puisqu'en tout point x de X il existe un voisinage X ne rencontrant qu'un nombre fini d'ouverts U_i , donc tel que la restriction de F_n à $[0,1] \times X$ soit indépendante de n pour n assez grand $\square$

§ 2 - QUOTIENT D'UN GROUPE PAR UN SOUS-GROUPE.

Le problème est le suivant : étant donné un groupe $G = \{G^k\}_{k \in S}^r$ de classe D_S^r et un sous-groupe H de classe D_S^r de G est-ce que l'action à droite (ou à gauche) de H sur G définit une fibration principale de classe D_S^r de G sur l'espace homogène G/H ? On s'intéresse tout particulièrement au cas où G est le groupe de classe D_1^r des difféomorphismes de classe C^r d'une variété compacte.

La solution de ce problème peut se ramener à montrer l'existence d'une section locale en l'élément neutre e de G :

Proposition 2.1.- Soient G un groupe de classe D_S^r et H un sous-groupe de classe D_S^r de G . Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) l'action à droite de H sur G définit une fibration principale de classe D_S^r .

(2) il existe une sous-variété S de G , de classe D_S^r , passant par l'élément neutre e , telle que l'application

$$\phi : S \times H \rightarrow G \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

soit un difféomorphisme de classe D_S^r sur un voisinage ouvert $W = \{W^k\}_{k \in S}^r$ de H dans G (i.e. W^S est un voisinage ouvert de H^S dans G^S et $W^k = G^k \cap W^S$).

Il est évident que (1) entraîne (2) ; montrons que (2) entraîne (1) .

On restreint éventuellement la sous-variété S pour qu'elle soit le domaine d'une seule carte locale ; la restriction à S du morphisme canonique χ de G sur G/H est alors une carte locale de G/H en le point $\chi(e)$ et par translation à gauche on définit un atlas de classe D_S^r de G/H : si

$$S \rightarrow G/H \quad x \rightsquigarrow \chi(g_1 \cdot x)$$

$$S \rightarrow G/H \quad x \rightsquigarrow \chi(g_2 \cdot x)$$

sont deux cartes de cet atlas et si $\chi(g_1 \cdot x) = \chi(g_2 \cdot x_2)$, il existe un élément h de H tel que $g_1 \cdot x_1 \cdot h = g_2 \cdot x_2$, donc $g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot x_2$ appartient à l'ouvert W ; il existe un voisinage $V = \{V^k\}_{k=s}^r$ de x_2 dans S tel que $g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot V$ soit contenu dans W et le changement de cartes qui est décrit au voisinage de x_2 par l'application composée

$$S \supset V \xrightarrow{g_1^{-1} \cdot g_2 \cdot} W = \phi(S \times H) \xrightarrow{\phi^{-1}} S \times H \xrightarrow{p_1} S$$

est de classe D_S^r . Pour la structure de variété de classe D_S^r ainsi définie sur G/H , l'application χ est de classe D_S^r et admet en tout point une section locale de classe D_S^r .

Par translation à gauche, l'application ϕ définit un atlas du fibré $(G, \chi, G/H)$ et les fonctions de transition sont de classe D_S^r : si $\phi^{-1}(g) = (s(g), h(g))$, l'application h est de classe D_S^r et par unicité, pour y élément de h , on a la relation $h(g \cdot y) = h(g) \cdot y$, donc, si $g_1 \cdot \phi(x_1, y_1) = g_2 \cdot \phi(x_2, y_2)$ il vient $y_2 = h(g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot x_1) \cdot y_1$ et la fonction de transition $h_{2,1}$ définie par $h_{2,1}(x_1) = h(g_2^{-1} \cdot g_1 \cdot x_1)$ est bien de classe D_S^r $\square$

Le problème étant ramené à celui de construire une section S nous distinguerons deux cas : ou bien on connaît a priori une structure de variété de classe D_S^r sur l'espace homogène G/H telle que χ soit une application de classe D_S^r et il suffit de construire une section locale de classe D_S^r de χ au point $\chi(e)$, ou bien on ne connaît aucune structure sur G/H et il faut avoir recours à un théorème de fonctions implicites.

1er cas : G/H est muni a priori d'une structure de variété de classe D_S^r .-

Proposition 2.2.- Soient G un groupe de classe D_S^r et H un sous-

groupe de classe D_S^r de G . Si G/H est muni d'une structure de variété de classe D_S^r telle que χ soit une application de classe D_S^r et qu'il existe au point $\chi(e)$ une section locale de classe D_S^r de χ , alors l'action de H sur G définit une fibration principale de classe D_S^r dont la base est la variété G/H donnée a priori.

Soit $W = \{W^k\}_{k=s}^r$ un voisinage de $\chi(e)$ dans G/H et s une section de classe D_S^r de χ , définie sur W ; on restreint éventuellement le voisinage W pour qu'il soit le domaine d'une carte locale de G/H . L'application

$$\psi : W \times H \rightarrow G \quad (x, y) \rightsquigarrow s(x).y$$

est de classe D_S^r ; c'est une bijection sur le voisinage ouvert $\chi^{-1}(W)$ de H dans G et l'application réciproque

$$G \supset \chi^{-1}(W) \rightarrow W \times H \quad z \rightsquigarrow (\chi(z), (s\chi(z))^{-1}.z)$$

est de classe D_S^r . On peut poser $S = s(W)$ et appliquer la proposition 2.1 $\square$

L'avantage de cette méthode est de montrer qu'une certaine variété connue est effectivement la base de la fibration ; ses limites en découlent : on ne peut l'appliquer qu'à des sous-groupes explicités, afin de pouvoir identifier l'espace homogène, et non à un sous-groupe général.

Nous allons donner deux exemples d'application de cette méthode.

Théorème 2.3.- Soient X une variété compacte de classe C^r et A une sous-variété fermée de classe C^r de X . Le groupe $\text{Aut}_A^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X laissant A fixe est un sous-groupe de classe D_1^r de $\text{Aut}^r(X)$; son action sur $\text{Aut}^r(X)$ définit une fibration principale de classe D_1^r ; la base de cette fibration s'identifie à une réunion de composantes connexes de la variété $\text{Pl}^r(A, X)$, la projection étant alors l'application

qui à un difféomorphisme de X associe sa restriction à A .

Le premier point résulte du lemme suivant :

Lemme 2.4.- Soit E un espace fibré vectoriel de classe C^r , de base compacte B et soit A une sous-variété fermée de classe C^r de B . Le morphisme de restriction R de la chaîne $\{C^k(E)\}_{k=0}^r$ des sections de E dans la chaîne $\{C^k(E_A)\}_{k=0}^r$ des sections de la restriction E_A de E sur A admet une section. Le noyau de R est donc un facteur direct de $\{C^k(E)\}_{k=0}^r$: c'est la chaîne des sections de nulles sur A .

Soit T un voisinage tubulaire de classe C^r de A et soit f une fonction numérique de classe C^r définie sur B , valant 1 sur A et nulle en dehors de T . La variété A étant un rétracte par déformation de classe C^r de T , le fibré E_T restriction de E sur T est différentiablement isomorphe au fibré image réciproque de E_A par la projection τ de T sur A . La section S de R est alors définie de la manière suivante : une section s de E_A définit une section de τ^*E_A , donc de E_T , qui multipliée par f définit une section $\hat{s}$ de E tout entier dont la restriction à E_A est s ; l'application S^0 de $C^0(E_A)$ dans $C^0(E)$ définie par $S^0(s) = \hat{s}$ est linéaire et pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq r$ induit une application linéaire S^k de $C^k(E_A)$ dans $C^k(E)$; la vérification de la continuité de S^k est immédiate sur les cartes locales $\square$

Soit α le plongement canonique de A dans X . L'application de restriction

$$\chi_A : \text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Pl}^r(A, X) \quad f \rightsquigarrow f|_A = f \circ \alpha$$

est de classe D_1^r et deux éléments de $\text{Aut}^r(X)$ ont même image par χ_A si et seulement si ils se correspondent dans l'action à droite de $\text{Aut}^r(X)$: l'image

de χ_A s'identifie, du point de vue ensembliste, à l'espace homogène $\text{Aut}^r(X) / \text{Aut}_A^r(X)$; la construction d'une section locale va montrer que cette image est un ouvert, donc une sous-variété.

Pour construire une section locale de χ_A en l'élément neutre 1_X de $\text{Aut}^r(X)$ on considère la carte locale de $\text{Aut}^r(X)$ au point 1_X et la carte locale de $\text{Pl}^r(A, X)$ au point $\alpha = \chi_A(1_X)$ associées à une application exponentielle (E, D, Exp) sur X . Si E_A est la restriction de E à A , l'application χ_A est représentée en coordonnées locales par l'application de restriction de $C^r(E)$ sur $C^r(E_A)$ (de manière plus exacte, par la restriction de cette application à un voisinage de l'origine de $C^1(E)$) ; l'existence d'une section locale de χ_A résulte alors immédiatement du lemme 2.4.

On définit une relation d'équivalence sur $\text{Pl}^r(A, X)$ de la manière suivante : deux plongements f_1 et f_2 sont équivalents s'il existe un difféomorphisme g de X tel que $f_2 = f_1 \circ g$; cette relation d'équivalence est ouverte : si f est un plongement de A dans X , la classe de f s'identifie à l'image de $\chi_{f(A)}$ dans $\text{Pl}^r(f(A), X)$, modulo l'isomorphisme évident de cette variété sur $\text{Pl}^r(A, X)$. On a ainsi défini une partition de $\text{Pl}^r(A, X)$ en ouverts : chacun d'eux, et en particulier l'image de χ_A , est une réunion de composantes connexes $\square$

Corollaire 2.5.- Soit X une variété compacte de classe C^r et soit a un point de X . L'application d'évaluation

$$\text{Aut}^r(X) \rightarrow X \quad f \rightsquigarrow f(a)$$

est une fibration de classe D_1^r de $\text{Aut}^r(X)$ sur une réunion de composantes connexes de X .

On applique le théorème précédent à la sous-variété fermée $A = \{a\}$ $\square$

Théorème 2.6.- Soient X une variété compacte de classe C^r et A

une sous-variété fermée de classe C^r de X . Le groupe $\text{Aut}^r(X, A)$ des difféomorphismes de classe C^r de X laissant A globalement invariant est un sous-groupe de classe D_1^r de $\text{Aut}^r(X)$; son action sur $\text{Aut}^r(X)$ définit une fibration principale de classe D_1^r ; la base de cette fibration s'identifie à une réunion de composantes connexes de la variété $H_A^r(X)$, la projection étant l'application qui à un difféomorphisme de X associe la sous-variété image de A par ce difféomorphisme.

Une étude directe est possible en construisant sur X une application exponentielle de classe C^r adaptée à la sous-variété A . On peut éviter cette construction en s'appuyant sur les résultats précédents. Nous choisissons cette deuxième méthode.

On considère d'une part la fibration de $\text{Aut}^r(X)$ sur un ouvert de $\text{Pl}^r(A, X)$ et d'autre part la fibration de $\text{Pl}^r(A, X)$ sur $H_A^r(X)$.

La restriction de $\text{Aut}^r(X)$ au dessus de la fibre en α (la plongement canonique de A dans X) de $\text{Pl}^r(A, X)$ est une sous-variété de classe D_1^r de $\text{Aut}^r(X)$: c'est le sous-groupe $\text{Aut}^r(X, A)$ qui est donc bien un sous-groupe de classe D_1^r .

L'application composée

$$\pi_A : \text{Aut}^r(X) \xrightarrow{\chi_A} \text{Pl}^r(A, X) \xrightarrow{\pi} H_A^r(X) \quad f \rightsquigarrow f(A)$$

est de classe D_1^r et deux éléments de $\text{Aut}^r(X)$ ont même image par π_A si et seulement si ils se correspondent dans l'action à droite de $\text{Aut}^r(X, A)$. L'existence de sections locales de classe D_1^r pour π et pour χ_A entraîne l'existence d'une section locale de classe D_1^r pour π_A .

On montre comme pour χ_A que l'image de π_A est une réunion de composantes connexes $\square$

Corollaire (de la démonstration) 2.7.- Soient X une variété compacte de classe C^r et A une sous-variété fermée de classe C^r de X . L'ac-

tion de $\text{Aut}_A^r(X)$ sur $\text{Aut}^r(X,A)$ définit une fibration principale de classe D_1^r ; la base de cette fibration s'identifie à une réunion de composantes connexes du groupe $\text{Aut}^r(A)$, la projection étant alors l'application qui à un difféomorphisme f élément de $\text{Aut}^r(X,A)$ associe le difféomorphisme induit sur A .

Remarque 2.8. - Une situation classique en géométrie différentielle est la suivante : un groupe G de classe D_s^r , deux sous-groupes H_1 et H_2 de classe D_s^r de G dont l'action à droite sur G définit des fibrations principales $(G, \chi_1, G/H_1)$ et $(G, \chi_2, G/H_2)$ de classe D_s^r , le groupe H_1 étant aussi sous-groupe de classe D_s^r de H_2 , son action à droite sur H_2 définissant une fibration de classe D_s^r (il suffit pour cela que $\chi_1(H_2)$ soit une sous-variété de classe D_s^r de G/H_1) . Alors l'application canonique π de G/H_1 sur G/H_2 est une fibration de classe D_s^r , de fibre H_2/H_1 et l'espace fibré $(G/H_1, \pi, G/H_2)$ s'identifie à l'espace fibré de fibre H_2/H_1 et de groupe structural H_2 associé au fibré principal $(G, \chi_2, G/H_2)$: on identifie H_2/H_1 avec $\pi^{-1}(\chi_2(e)) = \chi_1(H_2)$ et on définit une carte locale (U, ϕ) de la fibration $(G/H_1, \pi, G/H_2)$ au voisinage d'un point x_0 de G/H_2 en choisissant une section locale s_2 de classe D_s^r de χ_2 , définie sur un voisinage U de x_0 , et en posant ϕ l'application de $U \times \chi_1(H_2)$ dans G/H_1 définie par $\phi(x, y) = s_2(x) \cdot y$ où "." désigne l'action à gauche, de classe D_s^r , de G sur l'espace homogène G/H_1 ; les vérifications sont immédiates.

Si Y est une variété compacte et X une sous-variété fermée de classe C^r de Y , on peut prendre $G = \text{Aut}^r(Y)$, $H_1 = \text{Aut}_X^r(Y)$ et $H_2 = \text{Aut}^r(X, Y)$ l'espace homogène G/H_1 s'identifie à une réunion de composantes connexes de $\text{Pl}^r(X, Y)$ (théorème 2.3) , l'espace homogène G/H_2 à une réunion de composantes connexes de $H_X^r(Y)$ (théorème 2.6) , l'espace homogène H_2/H_1 à un sous-groupe réunion de composantes connexes de $\text{Aut}^r(X)$ (corollaire 2.7) , enfin l'application π est induite par l'application qui à un plongement associe son image : on retrouve ici une partie de la fibration de $\text{Pl}^r(X, Y)$ sur $H_X^r(Y)$, de manière

précise la fibration de l'orbite du plongement canonique de X dans Y pour l'action à gauche de $\text{Aut}^r(Y)$ sur $\text{Pl}^r(X,Y)$; le même procédé conduit à la fibration des autres orbites de cette action (en remplaçant la sous-variété X par une sous-variété isomorphe), d'où la fibration de $\text{Pl}^r(X,Y)$ tout entier. Le sous-groupe $\text{Aut}_X^r(Y)$ étant distingué dans $\text{Aut}^r(Y,X)$ on peut dans cette fibration réduire le groupe structural de $H_2 = \text{Aut}^r(Y,X)$ à son image dans $\text{Aut}^r(X)$.

Si Y est une variété compacte, X une sous-variété fermée de classe C^r de Y et A une sous-variété fermée de classe C^r de X , on peut prendre $G = \text{Aut}^r(Y)$, $H_1 = \text{Aut}_X^r(Y)$ et $H_2 = \text{Aut}_A^r(Y)$; les espaces homogènes G/H_1 et G/H_2 s'identifient respectivement à une réunion de composantes connexes de $\text{Pl}^r(A,Y)$ et à une réunion de composantes connexes de $\text{Pl}^r(X,Y)$ (théorème 2.3) ; le lemme 2.4 appliqué à une carte locale canonique de $\text{Pl}^r(X,Y)$ montre que l'espace des plongements de X dans Y laissant A fixe est une sous-variété de classe D_1^r de $\text{Pl}^r(X,Y)$: l'image de H_2 par χ_1 est une réunion de composantes connexes de cette variété ; enfin l'application π est induite par l'application de restriction ρ d'un plongement de X dans Y à un plongement de A dans Y . On trouve ainsi une partie de la fibration de $\text{Pl}^r(X,Y)$ sur $\text{Pl}^r(A,Y)$, de manière précise la fibration de l'orbite du plongement canonique de X dans Y pour l'action à gauche de $\text{Aut}^r(Y)$ sur $\text{Pl}^r(X,Y)$; en remplaçant X (et A) par une sous-variété isomorphe de Y , on met en évidence la fibration des autres orbites. La restriction du fibré $(\text{Pl}^r(X,Y), \rho, \text{Pl}^r(A,Y))$ au dessus de l'orbite d'un plongement de A dans Y est une réunion d'orbites et chacune d'entre elles est munie de la structure d'espace fibré de groupe structural $\text{Aut}_{\alpha(A)}^r(Y)$ et de fibré une certaine réunion de composantes connexes de la variété $\text{Pl}_{\alpha}^r(X,Y)$ des plongements de X dans Y dont la restriction à A est α , associée au fibré principal $(\text{Aut}^r(Y), \chi_A, \text{Pl}^r(A,Y))$; il en résulte que tout fibré au dessus de l'orbite de α est l'espace fibré de groupe structural $\text{Aut}_{\alpha(A)}^r(Y)$ et de fibre $\text{Pl}_{\alpha}^r(X,Y)$ associé au fibré principal $(\text{Aut}^r(Y), \chi_A, \text{Pl}^r(A,Y))$. L'action de $\text{Aut}_{\alpha(A)}^r(Y)$ sur $\text{Pl}_{\alpha}^r(X,Y)$ étant effective, on ne peut

pas espérer en général de réduction du groupe structural.

2ème cas : emploi d'un théorème de fonctions implicites.-

Nous avons à notre disposition immédiate le lemme III.1.5 qui s'étend sans difficulté aux applications de classe D_S^r :

Lemme 2.9.- Soient $\{E^k\}_{k=0}^r$ une chaîne d'espaces de Banach, F un espace de Banach, Ω un ouvert de $E^r \times F$ de la forme $\Omega^S \cap (E^r \times F)$ avec Ω^S un ouvert de $E^S \times F$, et f une application de classe D_S^r de Ω dans F ; on suppose que l'on a $1 \leq s \leq r \leq \infty$. Si $f(a,b) = c$ et si $d_2 f(a,b)$ est un automorphisme de F , il existe des voisinages U de a dans E^r de la forme $U^S \cap E^r$ avec U^S ouvert dans E^S , V de b et W de c dans F et une application ϕ de $U \times W$ dans V , de classe D_S^r , telle que $z = \phi(x,y)$ soit l'unique solution dans V de $f(x,z) = y$.

Le lemme III.1.5 appliqué à l'extension f^S de f à Ω^S entraîne qu'il existe des voisinages U^S de a dans E^S , V de b et W de c dans F et une application ϕ^S de $U^S \times W$ dans V , de classe D^S , telle que $z = \phi^S(x,y)$ soit l'unique solution dans V de l'équation $f^S(x,z) = y$. Il reste à montrer que pour tout t vérifiant $s \leq t \leq r$ la restriction ϕ^t de ϕ^S à $U^t \times W = (U^S \cap E^t) \times W$ est de classe D^t : le lemme III.1.5 appliqué au point $(x, \phi^t(x,y))$ avec x élément de U^t et y élément de W entraîne que ϕ^t est de classe D^t au voisinage du point (x,y) , donc que ϕ^t est de classe D^t $\square$

Théorème 2.10.- Soit G un groupe de classe D_S^r , avec $1 \leq s \leq r \leq \infty$, et soit H un sous-groupe de classe D_S^r de G modelé sur des chaînes constantes (i.e. H est un sous-groupe différentiable de classe C^r modelé sur des espaces de Banach). L'action à droite de H sur G définit une fibration principale de classe D_S^r .

On notera γ la loi de composition de G et ι l'application de prise de l'inverse.

Il existe une carte locale (U, ψ) de G en l'élément neutre e sur une chaîne produit $\{E^k\}_{k=0}^r \times F$ telle que $\psi(e) = (0, 0)$ et que $\psi^{-1}(\{0\} \times F) = H \cap U$. Etant donné un voisinage $V = \{V^k\}_{k=s}^r$ de e tel que $\gamma(V, V)$ soit contenu dans U , on considère l'application composée θ suivante :

$$G \times H \supset V \times (V \cap H) \xrightarrow{\gamma} U \xrightarrow{\psi} \{E^k\}_{k=0}^r \times F \xrightarrow{p_2} F \xrightarrow{(\psi|_H)^{-1}} H ;$$

cette application est de classe D_s^r et l'on a $\theta(e, y) = y$. Par le lemme 2.8 il existe un voisinage $W = \{W^k\}_{k=s}^r$ de e dans V , un voisinage W' de e dans $V \cap H$ et une application θ de classe D_s^r de W dans W' telle que $y = \theta(x)$ soit l'unique solution dans W' de l'équation $\theta(x, y) = e$; on restreint éventuellement W^s pour que $\gamma(\iota(W^s), W^s) \cap H$ soit contenu dans W' . Soit $S = \psi^{-1}(E^r \times \{0\}) \cap W$: un élément x de W appartient à S si et seulement si $\theta(x, e) = e$, c'est-à-dire encore si et seulement si $\theta(x) = e$; on considère l'application

$$\phi : S \times H \rightarrow G \quad (x, y) \rightsquigarrow \gamma(x, y) = x \cdot y$$

L'application ϕ est injective : si $x_1 \cdot y_1 = x_2 \cdot y_2$ on a $x_2^{-1} \cdot x_1 = y_2 \cdot y_1^{-1}$ élément de $\gamma(\iota(W), W) \cap H \subset W'$ qui vérifie $\theta(x_2, x_2^{-1} \cdot x_1) = e = \theta(x_2, e)$, donc $x_2^{-1} \cdot x_1 = e$ par unicité dans W' de la solution du problème de fonctions implicites, et $y_2 \cdot y_1^{-1} = e$.

L'application ϕ admet localement en tout point une application réciproque de classe D_s^r : en un point $x_0 = \phi(x_0, e)$ de S , comme $x_0 \cdot \theta(x_0) = x_0$ appartient à S qui est contenu dans W , il existe un voisinage $X = \{X^k\}_{k=s}^r$ de x_0 dans G tel que pour tout point x de X on ait $x \cdot \theta(x)$ élément de W , donc de S puisque $\theta(x \cdot \theta(x), e) = \theta(x, \theta(x)) = e$; on a donc $x = (x \cdot \theta(x)) \cdot (\theta(x))^{-1}$ et l'application réciproque de ϕ au voisinage de x est de la forme

$(\gamma_0(1_G \times \theta)) \times (1_0 \theta)$. En un point quelconque $z_0 = \phi(x_0, y_0)$ il existe un voisinage $Z = \{Z^k\}_{k=s}^r$ tel que $Z^s \cdot y_0^{-1}$ soit contenu dans le voisinage X^s de x_0 construit précédemment ; γ_y désignant la translation à droite par un élément y , l'application réciproque de ϕ au voisinage de z_0 est l'application composée suivante :

$$Z \xrightarrow{\gamma_{y_0}^{-1}} X \xrightarrow{\phi^{-1}} S \times H \xrightarrow{1_S \times \gamma_{y_0}} S \times H$$

qui est de classe D_s^r .

L'application ϕ est donc un difféomorphisme de classe D_s^r de $S \times H$ sur un voisinage ouvert de H dans G : on peut appliquer la proposition 2.1 $\square$

Corollaire 2.11.- Soient G un groupe de Lie compact, X une variété compacte de classe C^r et ϕ une action effective de classe C^r de G sur X . Alors G s'identifie à un sous-groupe de classe D_1^r de $\text{Aut}^r(X)$ et l'action à droite de G sur $\text{Aut}^r(X)$ définit une fibration principale de classe D_1^r .

C'est une conséquence immédiate du corollaire II.4.8 et du théorème 2.10 $\square$

Le corollaire 2.11 peut s'énoncer pour un groupe de Lie G non compact à condition de rajouter l'hypothèse que l'immersion de G dans $\text{Aut}^r(X)$ définie par ϕ (théorème II.4.7) est un plongement.

§ 3 - QUELQUES THEOREMES DE "SMOOTHING".-

Nous nous proposons d'appliquer le théorème d'approximation aux applications de but les variétés $H_{X,G}^r(Y)$ étudiées au théorème III.4.14, dans l'hypothèse où le groupe G est un sous-groupe de classe D_s^r , avec $1 \leq s \leq r$, du groupe $\text{Aut}^r(X)$, dont l'action (à droite) définit une fibration principale de classe D_s^r , cette notion étant évidente dans la catégorie des variétés de classe D_s^r . Sous cette hypothèse, l'espace homogène $\text{Aut}^r(X)/G$ est une variété de classe D_s^r et l'action de $\text{Aut}^r(X)$ sur cette variété est de classe D_s^r . Le fibré principal $(\text{Pl}^r(X,Y), \pi, H_X^r(Y), \text{Aut}^r(X))$ peut être muni d'une structure de fibré principal de classe D_1^r de manière compatible avec les structures canoniques de variétés de classe D_1^r sur $\text{Pl}^r(X,Y)$ et $H_X^r(Y)$: cela résulte de ce que les sections locales définies à la proposition III.2.1 sont de classe D_1^r . L'espace fibré $H_{X,G}^r(Y)$ de base $H_X^r(Y)$, de fibre $\text{Aut}^r(X)/G$ et de groupe structural $\text{Aut}^r(X)$ associé au fibré principal $(\text{Pl}^r(X,Y), \pi, H_X^r(Y), \text{Aut}^r(X))$ est donc un fibré de classe D_s^r et l'on a

$$[H_{X,G}^r(Y)]^k \cong H_{X,G}^k(Y) \quad .$$

Le théorème d'approximation appliqué à la variété $H_{X,G}^r(Y)$ de classe D_s^r et interprété par le théorème III.4.14 s'exprime de manière suivante :

Proposition 3.1.- Soient X une variété compacte de classe C^r , $G = \{G^k\}_{k=s}^r$ un sous-groupe de classe D_s^r , avec $1 \leq s \leq r$, du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X , dont l'action (à droite) définit une fibration principale de classe D_s^r , et soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Soit E un espace fibré de classe D^s , de base une variété B de classe C^r paracompacte et de dimension finie, de fibre X , de groupe structural G^s , plongé par f dans le fibré trivial $B \times Y$. Il existe un espace fibré $\bar{E}$ de classe D^s , de base $[0,1] \times B$, de fibre X , de groupe structural G^s et un plongement $\bar{f}$ de $\bar{E}$ dans le fibré trivial

$[0,1] \times B \times Y$ tels que :

(1) le fibré E s'identifie à la restriction de $\bar{E}$ au dessus de $\{0\} \times B$ et f à la restriction de $\bar{f}$;

(2) soit $\bar{E}^*$ le fibré restriction de $\bar{E}$ à $]0,1] \times B$; il existe sur $\bar{E}^*$ une structure d'espace fibré de classe D^r et de groupe structural G^r , compatible avec la structure d'espace fibré de classe D^s et de groupe structural G^s , telle que la restriction de $\bar{f}$ à $\bar{E}^*$ soit un plongement de classe C^r .

L'espace fibré $\bar{E}$ est, en tant qu'espace fibré de classe D^s et de groupe structural G^s , équivalent à l'espace fibré $[0,1] \times E$; de même, l'espace fibré $\bar{E}^*$ est, en tant qu'espace fibré de classe D^r et de groupe structural G^r , équivalent à l'espace fibré $]0,1] \times (E \setminus \{1\} \times B)$ (la démonstration classique pour les espaces fibrés différentiables s'étend sans modification au cas dérivable). La proposition précédente peut donc encore s'énoncer de la manière suivante :

Théorème 3.2.- Soient X une variété compacte de classe C^r , $G = \{G^k\}_{k=s}^r$ un sous-groupe de classe D_s^r , avec $1 \leq s \leq r$, du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X , dont l'action (à droite) définit une fibration principale de classe D_s^r , et soit Y une variété de classe C^r admettant une application exponentielle. Soit E un espace fibré de classe D^s , de base une variété B de classe C^r paracompacte et de dimension finie, de fibre X , de groupe structural G^s , plongé par f dans le fibré trivial $B \times Y$. Il existe une structure $\hat{E}$ d'espace fibré de classe D^r et de groupe structural G^r sur E , compatible avec la structure d'espace fibré de classe D^s et de groupe structural G^s , et un plongement F de classe C^s du fibré $[0,1] \times \hat{E}$ dans le fibré trivial $B \times Y$ tel que :

(1) l'application f est la restriction de F à $\{0\} \times \hat{E}$;

(2) la restriction de F à $]0,1] \times \hat{E}$ est de classe C^r .

Corollaire 3.3.- Soient X une variété compacte de classe C^r , $G = \{G^k\}_{k=s}^r$ un sous-groupe de classe D_s^r , avec $1 \leq s \leq r$, du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r de X , dont l'action (à droite) définit une fibration principale de classe D_s^r , et soit E un espace fibré de classe D^s , de base une variété B de classe C^r paracompacte et de dimension finie, de fibre X , de groupe structural G^B . Il existe sur E une structure d'espace fibré de classe D^r et de groupe structural G^r , compatible avec la structure d'espace fibré de classe D^s et de groupe structural G^s .

L'espace total de E est une variété paracompacte de dimension finie, de classe au moins C^1 . Il existe un plongement de classe C^s de cette variété dans un espace euclidien $\mathbb{R}^m$, d'où un plongement du fibré E dans le fibré trivial $B \times \mathbb{R}^m$. On applique alors le théorème précédent $\square$

Définition 3.4.- Soit $G = \{G^k\}_{k=s}^r$ un groupe de classe D_s^r , avec $1 \leq s \leq r$. Nous dirons que G est réalisable si on peut l'identifier à un sous-groupe de classe D_s^r du groupe $\text{Aut}^r(X)$ des difféomorphismes de classe C^r d'une variété compacte X , l'action de G sur $\text{Aut}^r(X)$ définissant une fibration principale de classe D_s^r .

La propriété énoncée au corollaire 3.3 ne dépend ni de la nature de la fibre, ni de l'action du groupe structural sur la fibre : cette propriété ne dépend que des fonctions de transition, c'est-à-dire de la classe des fibrés associés. On peut donc généraliser ce résultat de la manière suivante :

Théorème 3.5.- Soient $G = \{G^k\}_{k=s}^r$ un groupe réalisable de classe D_s^r , $F = \{F^k\}_{k=s}^r$ une variété de classe D_s^r et $\Phi = \{\Phi^k\}_{k=s}^r$ une action de classe D_s^r de G sur F . Si E est un fibré de classe D^s , de base une variété B de classe C^r paracompacte et de dimension finie, de fibre F^S et de groupe struc-

tural G^S , il existe un fibré $\bar{E} = \{\bar{E}^k\}_{k=s}^r$ de classe D_s^r , de base B et de
groupe structural G tel que $\bar{E}^S$ s'identifie à E .

On choisit une réalisation de G comme sous-groupe du groupe des difféomorphismes d'une variété compacte X et on applique le corollaire 3.3 au fibré de fibre X associé à E $\square$

Remarque 3.6.- Le corollaire 3.3 et le théorème 3.5 sont conséquences du fait que si E est l'espace de Hilbert des suites de carrés sommables et si G est un groupe de classe D^r réalisable comme sous-groupe du groupe des difféomorphismes d'une variété compacte X , alors l'espace fibré principal $(Pl^r(X, E), \pi_G, H_{X, G}^r(E))$ est universel pour les fibrés de classe D^r de groupe structural G et de base une variété paracompacte.

Les exemples de groupes réalisables présentés au §.2 conduisent à des expressions particulières du théorème 3.4 :

Théorème 3.8.- Soient X et Y deux variétés de classe C^r , avec
 $1 \leq r \leq \infty$, paracompactes et de dimension finie, soit A une sous-variété fermée
de classe C^r de X et soit f une submersion propre de classe C^r de X dans
 Y dont la restriction à A est encore une submersion. Etant donnée une structure
compatible de variété de classe C^∞ sur Y , il existe une structure compatible
de variété de classe C^∞ sur X telle que A soit une sous-variété de classe
 C^∞ et que f soit une application de classe C^∞ .

La démonstration de ce théorème passe par l'identification de f avec une fibration :

Lemme 3.9.- Soient X une variété de classe C^r , avec $1 \leq r \leq \infty$,
admettant une application exponentielle, A une sous-variété fermée de classe C^r
de X et f une submersion propre de classe C^r de X dans Y dont la restric-
tion à A est encore une submersion ; on suppose pour simplifier que f est sur-

jective et que Y est connexe. Si X_0 est la fibre de f en un point y_0 de Y , alors $A_0 = X_0 \cap A$ est une sous-variété fermée de X_0 et f est une fibration de classe C^r , de fibre X_0 et de groupe structural le groupe $\text{Aut}^r(X_0, A_0)$ des difféomorphismes de classe C^r de X_0 laissant la sous-variété A_0 globalement invariante.

Il suffit de montrer qu'en tout point de Y , en y_0 par exemple, il existe un voisinage U et une carte locale ϕ de $f^{-1}(U)$ sur $U \times X_0$ telle que $\phi^{-1}(U \times A_0) = f^{-1}(U) \cap A$.

Par le lemme III.O.7 on sait que (X, f, Y) et $(A, f|_A, Y)$ sont des fibrations localement triviales de classe C^r : il existe donc un voisinage U de y_0 , une carte locale de $f^{-1}(U)$ sur $U \times X_0$ et une carte locale de $f^{-1}(U) \cap A$ sur $U \times A_0$. Relativement à ces cartes le plongement de A dans X est de la forme

$$U \times A_0 \rightarrow U \times X_0 \quad (y, a) \rightsquigarrow (y, \tilde{\alpha}(y, a))$$

où l'application $\tilde{\alpha}$ de classe C^r correspond à une application α de classe D^r de U dans $\text{Pl}^r(A_0, X_0)$; on se ramène par un changement de cartes évident sur $f^{-1}(U) \cap A$ au cas où $\alpha(y_0)$ est le plongement canonique α_0 de A_0 dans X_0 . Nous cherchons, en restreignant éventuellement U , un changement de cartes de classe C^r

$$U \times X_0 \rightarrow U \times X_0 \quad (y, x) \rightsquigarrow (y, \tilde{\xi}(y, x))$$

décrit par une application ξ de classe D^r de U dans $\text{Aut}^r(X_0)$, tel que $\tilde{\xi}(y, \tilde{\alpha}(y, a)) = \alpha_0(a)$ c'est-à-dire encore $\xi(y) \circ \alpha(y) = \alpha_0$. Nous avons vu (théorème 2.3) que l'application

$$\text{Aut}^r(X_0) \rightarrow \text{Pl}^r(A_0, X_0) \quad \xi \rightsquigarrow \xi \circ \alpha_0$$

est une fibration, donc admet des sections locales : il existe un voisinage Ω

de α_0 et une application s de classe D^r de Ω dans $\text{Aut}^r(X_0)$ telle que pour tout plongement α élément de Ω on ait $s(\alpha)\alpha_0 = \alpha$. En restreignant U de telle sorte que $\alpha(U)$ soit contenu dans Ω on peut poser $\xi = i \circ s \circ \alpha$, où i est l'application de prise de l'inverse dans $\text{Aut}^r(X_0)$ $\square$

Pour pouvoir appliquer le théorème 3.5 à l'espace fibré (X, f, Y) il reste à identifier l'action de $\text{Aut}^r(X_0, A_0)$ sur X_0 à l'étage r de l'action d'un groupe de classe D_r^∞ sur une variété de classe D_r^∞ : on y parvient si l'on peut munir X_0 d'une structure de variété de classe C^∞ telle que A_0 soit alors une sous-variété de classe C^∞ ; ceci fait l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.10.- Soit X une variété de classe C^r , avec $1 \leq r \leq \infty$, paracompacte et de dimension finie et soit A une sous-variété fermée de classe C^r de X . Etant donnée sur A une structure de variété de classe C^∞ , compatible avec la structure de classe C^r initiale, il existe sur X une structure de variété de classe C^∞ , compatible avec la structure de classe C^r initiale, telle que A soit une sous-variété de classe C^∞ et que la structure induite sur A soit la structure donnée.

Soient $\bar{A}$ et $\bar{X}$ des structures de variétés de classe C^∞ sur A et X , compatibles avec les structures de classe C^r initiales, et soit α le plongement canonique de A dans X ; a priori α n'est, relativement aux structures $\bar{A}$ et $\bar{X}$, qu'une application de classe C^r . Si l'on trouve un difféomorphisme ξ de classe C^r de X tel que $\xi \circ \alpha$ soit de classe C^∞ relativement à $\bar{A}$ et $\bar{X}$, la structure de variété de classe C^∞ sur X , image réciproque par ξ de celle de $\bar{X}$ sera telle que α soit de classe C^∞ , donc que $\bar{A}$ soit une sous-variété de classe C^∞ . L'existence d'un tel difféomorphisme résulte de la densité de $\text{Pl}^\infty(\bar{A}, \bar{X})$ dans $\text{Pl}^r(\bar{A}, \bar{X}) = \text{Pl}^r(A, X)$ et de ce que l'image de l'application

$$\text{Aut}^r(X) \rightarrow \text{Pl}^r(A, X) \quad \xi \rightsquigarrow \xi \circ \alpha$$

est ouverte : nous l'avons démontré au théorème 2.3 lorsque les variétés A et X sont compactes, comme conséquence directe du lemme 2.4. ; cette démonstration reste valable dans le cas non compact, les espaces étant munis de la C^r -topologie fine, l'argument étant l'existence d'un voisinage tubulaire de classe C^r de A , ce qui a été établi sans restriction de compacité (corollaire III.0.6) $\square$

Corollaire 3.11. - Soient X et Y deux variétés de classe C^r , avec $1 \leq r \leq \infty$, paracompactes et de dimensions finies f une submersion propre de classe C^r de X dans Y et s une section de classe C^r de f (définie sur $\text{Im } f$). Etant donnée une structure compatible de variété de classe C^∞ sur Y , il existe une structure compatible de variété de classe C^∞ sur X telle que les applications f et s soient de classe C^∞ .

L'image A de s est une sous-variété fermée de classe C^r et la restriction de f à A est une submersion : on applique le théorème 3.8. $\square$

Remarque 3.12. - Le lemme 3.10 entraîne aisément l'existence pour une variété X de classe C^r , paracompacte et de dimension finie, d'une application exponentielle (de classe C^r) adaptée à une sous-variété fermée A de classe C^r : on munit le couple (X, A) d'une structure compatible de classe C^∞ et on fait alors la construction usuelle d'un spray de classe C^∞ adapté au couple. Ce résultat permettrait par exemple d'établir le théorème 2.6 indépendamment du théorème 2.3.

De manière duale, une variété X de classe C^r , paracompacte et de dimension finie, admet une application exponentielle (de classe C^r) adaptée à une fibration (X, p, B) de classe C^r et de fibre compacte, c'est-à-dire la donnée d'applications exponentielles (E, D, Exp_X) sur X et (F, U, Exp_B) sur B et d'un morphisme (p, P) d'espaces fibrés vectoriels de classe C^r de E dans F tel que $\text{Exp}_B \circ P = (p \times p) \circ \text{Exp}_X$: on munit la fibration (X, p, B) d'une structure

compatible de classe C^∞ par le théorème 3.8 et on fait la construction usuelle d'un spray de classe C^∞ adapté à la fibration. Il en résulte par exemple que le groupe des difféomorphismes de classe C^r d'une variété compacte X respectant une fibration (X, p, B) de X est un sous-groupe de classe D_1^r du groupe $\text{Aut}^r(X)$, dont l'action à droite définit une fibration principale de base une réunion de composantes connexes de la variété $\text{Sub}^r(X, B)$ des submersions de classe C^r de X sur B (c'est un ouvert de $C^r(X, B)$ pour la C^1 -topologie), la projection étant l'application qui à un difféomorphisme ξ associe la submersion $p \circ \xi$.

Théorème 3.13.- Soit G un groupe de Lie réalisable en tant que groupe de classe D_1^r et soit $E = (E, p, B, F, G, \phi)$ un espace fibré de Steenrod de classe C^s , de base paracompacte et de dimension finie, la fibre F et l'action ϕ de G sur F étant de classe C^r ; on suppose que l'on a $1 \leq s \leq r \leq \infty$. Il existe sur E une structure d'espace fibré de classe C^r , de groupe structural G , compatible avec la structure d'espace fibré de classe C^s initiale.

C'est une conséquence directe du théorème 3.5 $\square$

Par le théorème 2.10, un groupe de Lie est réalisable en tant que groupe de classe D_1^r s'il existe une variété compacte X de classe C^r telle que G s'identifie à un sous-groupe de classe D_1^r du groupe $\text{Aut}^r(X)$. Les lemmes suivantes donnent des exemples usuels de groupes de Lie réalisable :

Lemme 3.14.- Tout groupe de Lie compact est réalisable en tant que groupe de classe D_1^∞ .

Un groupe compact opère effectivement sur lui même par translation ; on applique alors le corollaire II.4.8 $\square$

Lemme 3.15.- Tout sous-groupe (fermé) d'un groupe linéaire $\text{Gl}(n, K)$ ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est réalisable en tant que groupe de classe D_1^∞ .

Un tel groupe est un sous-groupe fermé du groupe projectif $GP(n+1, K)$ et celui-ci opérant effectivement sur la variété compacte $P(n+1, K)$, il existe une immersion injective ϕ de $GP(n+1, K)$ dans $Aut^\infty(P(n+1, K))$; il reste à montrer que l'image de ϕ est une sous-variété de classe D_1^∞ . Pour cela il suffit qu'étant donné un voisinage U arbitrairement petit de l'élément neutre de $GP(n+1, K)$ il existe un voisinage V de l'élément neutre dans $Aut^1(P(n+1, K))$ tel que $\phi^{-1}(V)$ soit contenu dans U ; cela résulte de ce que la topologie de $GP(n+1, K)$ est celle de la convergence uniforme $\square$

Corollaire 3.16.- Le groupe des automorphismes d'un groupe de Lie connexe est réalisable en tant que groupe de classe D_1^∞ .

Ce groupe est un sous-groupe fermé du groupe des automorphismes de son algèbre de Lie qui est pour sa part un sous-groupe pseudo-algébrique d'un groupe linéaire $\square$

CHAPITRE V

Le point de départ des réflexions présentées dans ce chapitre est la version du théorème de Nash donnée par S. Sternberg dans [13] :

Théorème.- Soient $E^* = \{E^k\}_{k=0}^\infty$ et $F^* = \{F^k\}_{k=0}^\infty$ deux chaînes d'espaces de Banach, Ω un voisinage ouvert de l'origine dans E^∞ , f une application définie sur Ω à valeurs dans F^∞ . On fait sur f les hypothèses suivantes :

- i - L'application f est deux fois différentiable.
- ii - En notant ρ_k la norme de E^k et celle de F^k , les différentielles de f vérifient :

$$\rho_k(df(x).\xi) \leq A_k \sum_{\alpha+\beta=k+a} \sup\{1, \rho_\alpha(x)\} \rho_\beta(\xi)$$

$$\rho_k(d^2f(x).(\xi, n)) \leq A_k \sum_{\alpha+\beta+\gamma=k+a} \sup\{1, \rho_\alpha(x)\} \rho_\beta(\xi) \rho_\gamma(n) .$$

- iii.- Pour tout x de Ω , l'application $df(x)$ admet un inverse à droite $v(x)$ qui vérifie :

$$\rho_k(v(x).\phi) \leq A_k \sum_{\alpha+\beta=k+a} \sup\{1, \rho_\alpha(x)\} \rho_\beta(\phi) .$$

Sous ces hypothèses, pour tout p assez grand, il existe un entier q ne dépendant que de p et de a , il existe un $\eta > 0$ dépendant de p , de a et des A_k pour $k \leq q$, tels que si

$$\rho_{p+q}(f(0)) < \eta$$

il existe x élément de E^p tel que $f(x) = 0$.

Une qualité de ce théorème se mesurant à la régularité de la solution, c'est-à-dire la différence q entre la classe de la condition $(\rho_{p+q}(f(0)) < \eta)$

et la classe de la solution $(x \in E^p)$, il semble souhaitable de rendre q aussi petit que possible. Les résultats que nous obtenons en ce sens résultent d'un approfondissement de la démonstration donnée par Sternberg. Celle-ci se décompose en deux parties distinctes :

(1) Un théorème, ou plutôt une suite de théorèmes correspondant à diverses hypothèses de majoration, développant la méthode d'approximation de Newton dans le cadre abstrait des séquences d'espaces normés ([13], théorèmes 6.3, 6.4 et 6.5).

(2) La réduction du théorème de Nash à un théorème de ce type par construction de séquences d'espaces normés.

Les modifications ou compléments apportés ici à cette démonstration sont de trois ordres :

(a) Les divers théorèmes concernant les séquences d'espaces normés sont fondus en un seul (Th. 1.3.) par introduction de paramètres ; ceci permet lors de la démonstration du théorème de Nash de choisir, en ajustant les paramètres, le théorème donnant le résultat optimum.

(b) Dans la démonstration du théorème de Nash, les majorations faites sur les différentielles de f et sur v jouent un rôle critique, en particulier le défaut de différentiabilité q de la solution varie rapidement avec le paramètre a . D'autre part, si f est une application dérivable, il apparaît que l'on peut raffiner ces majorations : par exemple, le fait que $j^{k,k+1} f^{k+1}$ soit de classe C^1 et que $j^{k,k+2} f^{k+2}$ soit de classe C^2 , indique que l'on peut prendre $a = 1$ dans la majoration de $\rho_k(df(x). \xi)$ et $a = 2$ dans celle de $\rho_k(d^2f(x). (\xi, \eta))$; de même la factorisation de $d(j^{k,k+1} f^{k+1})(x)$ en une application de E^k dans F^k indique que l'on peut imposer $\beta \neq k+1$ dans la majoration de $\rho_k(df(x). \xi)$ qui peut alors s'écrire :

$$\rho_k(df(x).\xi) \leq A_k \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{1+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\xi) ;$$

une remarque analogue vaut bien sûr pour la majoration de $\rho_k(d^2f(x).(\xi, \eta))$.

Pour tenir compte de ces particularités, tout en conservant un théorème général non restreint au cas dérivable, les paramètres dans les hypothèses du théorème de Nash ont été diversifiées. La variation rapide de q en fonction de ces paramètres montre l'intérêt de leur introduction (cf. § 5. Remarque 5.1). Il est en outre remarquable que l'on trouve une expression de q ne dépendant pas de p .

(c) alors que l'entier q doit avoir une valeur minimum pour que le mécanisme de la démonstration fonctionne, on constate que la solution ainsi construite dans E^p appartient en fait à un espace $E^{p+\lambda}$ avec $\lambda > 0$; le § 4 est consacré à la mise en évidence de factorisations de ce type, sans qu'une théorie générale n'ait pu être dégagée.

L'étude de la régularité des solutions de $f(x) = 0$ et des sections continues de f est complétée par celle des sections différentiables dont l'existence est démontrée moyennant une hypothèse supplémentaire sur v .

Le dernier paragraphe est consacré au rôle des applications dérivables dans l'utilisation du théorème de Nash. Leur introduction n'est certes pas une nécessité mais une commodité. Les avantages que nous y trouvons peuvent se résumer ainsi :

- minoration importante du défaut de régularité de la solution ;
- facilité de démonstration des propriétés de différentiabilité de f par application des théorèmes de composition et de caractérisation des applications dérivables, ceci sans accroissement des paramètres caractéristiques ;
- facilité de démonstration des majorations portant sur df et d^2f , celles-ci, pourvu qu'on leur adjoigne une majoration naturelle portant sur f , se conservant dans les opérations classiques sur les applications dérivables, en particulier par composition ;

- continuité de df et d^2f (au sens faible suffisant pour l'application du théorème de Nash) assurée sans avoir à augmenter les paramètres caractéristiques.

§ 1 - THEOREME DE FONCTIONS IMPLICITES ABSTRAIT.-

Définition 1.1.- Soit E un espace de Banach ; nous appellerons séquence d'espaces normés de but E , et nous noterons $E_{\cdot}$, une suite d'espaces normés E_k et d'applications linéaires continues

$$i_{kh} : E_h \rightarrow E_k \quad \text{pour } 0 \leq h \leq k$$

$$i_h : E_h \rightarrow E \quad \text{pour } 0 \leq h$$

de norme inférieure ou égale à 1, vérifiant

$$i_{lk} \circ i_{kh} = i_{lh} \quad \text{pour } 0 \leq h \leq k \leq \ell$$

$$i_k \circ i_{kh} = i_h \quad \text{pour } 0 \leq h < k.$$

Si l'on note B_h (resp. B) la boule unité de E_h (resp. E), la condition sur les normes des applications i_{kh} et i_h entraîne que l'on a

$$i_{kh}(B_h) \subset B_k \quad \text{pour } 0 \leq h < k$$

$$i_h(B_h) \subset B \quad \text{pour } 0 \leq h.$$

Nous noterons $B(E_{\cdot})$ la suite des boules B_h .

Définition 1.2.- Soient $E_{\cdot}$ et $F_{\cdot}$ deux séquences d'espaces normés de buts respectifs E et F ; un morphisme $f_{\cdot}$ de classe C^1 de $B(E_{\cdot})$ dans $F_{\cdot}$ est une suite d'applications de classe C^1

$$f_h : B_h \rightarrow F_h$$

et une application continue

$$f : B \rightarrow F$$

telles que l'on ait les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{array}{ccc}
 B_h & \xrightarrow{i_{kh}} & B_k \\
 \downarrow f_h & & \downarrow f_k \\
 F_h & \xrightarrow{j_{kh}} & F_k
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 B_h & \xrightarrow{i_h} & B \\
 \downarrow f_h & & \downarrow f \\
 F_h & \xrightarrow{j_h} & F
 \end{array}$$

Théorème 1.3.- Soient E et F deux séquences d'espaces normés et f un morphisme de classe C^1 de $B(E)$ dans F . On suppose qu'il existe des constantes K, α, β, γ et τ vérifiant

$$0 \leq K, \quad 0 \leq \alpha, \quad 0 < \beta, \quad 0 \leq \gamma, \quad 1 < \tau < 2 \quad \text{et} \quad \frac{\alpha\tau + 2\gamma}{2-\tau} < \frac{\beta}{\tau-1}$$

telles que l'on ait

(1) l'application df_k vérifie sur B_k la condition de Lipschitz suivante

$$||df_k(x) - df_k(y)|| \leq e^{\alpha\tau^k} ||x - y||_k;$$

(2) quel que soit x élément de B_k et quel que soit a élément de F_k , il existe un élément b de E_{k+1} tel que

$$(i) \quad ||j_{k+1,k}a + df_{k+1}(i_{k+1,k}x)b||_{k+1} \leq K e^{-\beta\tau^k} ||a||_k,$$

$$(ii) \quad ||b||_{k+1} \leq K e^{\gamma\tau^k} ||a||_k.$$

Il existe alors un entier N et un nombre positif δ ne dépendant que des constantes K, α, β, γ et τ , tels que si $||f_N(0)|| \leq \delta$ l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans B .

On va construire une suite de point x_n , avec x_n éléments de B_n et $n \geq N$, telle que la suite $\{i_{n,n}x_n\}_{n \geq N}$ converge dans E et que $f(i_{n,n}x_n)$ tende vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

On pose $x_N = 0$ et

$$x_{n+1} = i_{n+1,n}x_n + b_{n+1}$$

où b_{n+1} est la solution approchée de

$$j_{n+1,n} f_n(x_n) + df_{n+1}(i_{n+1,n} x_n) \cdot b_{n+1} = 0$$

fournie par l'hypothèse (2)(i). On va montrer par récurrence sur n que la construction de la suite $\{x_n\}_{n \geq N}$ est possible, c'est-à-dire que

$$(1_n) \quad ||x_n||_n \leq 1,$$

et que s étant fixé tel que

$$\frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau} < s < \frac{\beta}{\tau-1}$$

on a

$$(2_n) \quad ||f_n(x_n)||_n \leq e^{-s\tau^n}$$

pourvu que N soit assez grand et que $||f_N(0)||_N \leq e^{-s\tau^N} = \delta$.

Supposons (1_n) et (2_n) vérifiées. On a alors

$$x_{n+1} = b_{n+1} + i_{n+1,n} b_n + \dots + i_{n+1,N+1} b_{N+1}$$

et, d'après l'hypothèse (2)(ii), on a

$$||b_{k+1}||_{k+1} \leq K e^{\gamma\tau^k} ||f_k(x_k)||_k \leq K e^{(\gamma-s)\tau^k}$$

d'où

$$||x_{n+1}||_{n+1} \leq K \sum_{k=N}^n e^{(\gamma-s)\tau^k} < K \sum_{k=N}^{\infty} e^{(\gamma-s)\tau^k} < \frac{K e^{(\gamma-s)\tau^N}}{1 - e^{(\gamma-s)(\tau-1)\tau^N}}$$

puisque $s > \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}$ entraîne $s > \gamma$. Il existe un nombre N_1 tel que pour $N \geq N_1$ le majorant obtenu pour $||x_{n+1}||_{n+1}$ soit inférieur à 1. Dans cette hypothèse la construction de x_{n+2} sera possible.

On peut évaluer $||f_{n+1}(x_{n+1})||_{n+1}$ par la formule de Taylor à

l'ordre 1 :

$$\begin{aligned}
& \|f_{n+1}(x_{n+1})\|_{n+1} \leq \|f_{n+1}(i_{n+1,n}x_n) + df_{n+1}(i_{n+1,n}x_n).b_{n+1}\|_{n+1} \\
& + \left\| \int_0^1 [df_{n+1}(i_{n+1,n}x_n + tb_{n+1}) - df_{n+1}(i_{n+1,n}x_n)] . b_{n+1} dt \right\|_{n+1} \\
& \leq K e^{-(\beta+s)\tau^n} + K^3 e^{(\alpha\tau+2(\gamma-s))\tau^n}
\end{aligned}$$

quantité qui sera inférieure à $s^{-s\tau^{n+1}}$ si l'on a

$$K e^{-(\beta-s(\tau-1))\tau^n} + K^3 e^{(\alpha\tau+2\gamma(2-\tau)s)\tau^n} \leq 1$$

ce qui sera réalisé pourvu que n soit supérieur à un nombre N_2 puisque s a été choisi tel que les exposants des exponentielles soient négatifs. Les hypothèses de récurrence sont donc vérifiées pour $N \geq \sup\{N_1, N_2\}$.

On a, enfin

$$\|i_{n+1}x_{n+1} - i_nx_n\| \leq \|x_{n+1,n}x_n\|_{n+1} \leq K e^{(\gamma-s)\tau^n}$$

qui entraîne que la suite $\{i_nx_n\}_{n \geq N}$ est convergente dans l'espace complet E et

$$\|f(i_nx_n)\| = \|i_n f_n(x_n)\| \leq \|f_n(x_n)\| \leq e^{-s\tau^n}$$

qui tend vers zéro, d'où, par continuité de f

$$f(\lim i_nx_n) = 0 \quad \square$$

Corollaire 1.4.- Soient E et F deux séquences d'espaces normés et f , un morphisme de classe C^1 de $B(E)$ dans F , nul à l'origine.

On suppose qu'il existe une suite d'applications

$$v_{k+1} : B_k \rightarrow L(F_k; E_{k+1})$$

telles que $\widetilde{v}_{k+1} = \text{ev} \circ (v_{k+1} \times 1_{F_k})$ soit continue et des constantes K, α, β, γ et τ vérifiant

$$0 \leq K, \quad 0 \leq \alpha, \quad 0 < \beta, \quad 0 \leq \gamma, \quad 1 < \tau < 2, \quad \text{et} \quad \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau} < \frac{\beta}{\tau-1}$$

telles que l'on ait

(1) l'application df_k vérifie sur B_k la condition de Lipschitz suivante

$$||df_k(x) - df_k(y)|| \leq K e^{\alpha\tau^k} ||x - y||_k ;$$

(2) quel que soit x élément de B_k on a

$$(i) \quad ||j_{k+1,k}^{+df_{k+1}}(i_{k+1,k}x) \circ v_{k+1}(x)|| \leq K e^{-\beta\tau^k} ,$$

$$(ii) \quad ||v_{k+1}(x)|| \leq K e^{\gamma\tau^k} .$$

Il existe alors un entier N et un nombre positifs δ ne dépendant que de K ,
 α , β , γ et τ et une application continue ϕ définie sur la boule $B_N(\delta)$
de rayon δ de F_N , à valeurs dans la boule unité B de E , telle que
 $f \circ \phi = j_N|_{B_N(\delta)} .$

Les nombres N et δ sont les nombres associés aux constantes K ,
 α , β , γ et τ par le théorème précédent. En oubliant les $N-1$ premiers
 espaces des séquences E et F et en réindexant, nous pouvons nous ramener
 au cas $N = 0$.

Pour tout y élément de $B_0(\delta)$, soit f^y le morphisme de classe
 C^1 de $B(E)$ dans F défini par

$$f_k^y(x) = f_k(x) - j_{k,0}y \quad x \in B_k$$

$$f^y(x) = f(x) - j_0y \quad x \in B .$$

Il est clair que le morphisme f^y vérifie les hypothèses du théorème et la démonstration de celui-ci met en évidence une suite de points $\{x_n^y\}_{n \geq 0}$ telle que $i_n x_n^y$ converge vers x^y dans E avec $f^y(x^y) = f(x^y) - j_0y = 0$. On pose $\phi(y) = x^y$ et $\phi_n(y) = x_n^y$, ϕ_n étant une application de $B_0(\delta)$ dans B .
 La suite d'application $\{i_n \phi_n\}_{n \geq 0}$ converge uniformément vers ϕ : on a en effet

$$||i_{n+1} x_{n+1}^y - i_n x_n^y|| = ||i_{n+1} \phi_{n+1}(y) - i_n \phi_n(y)|| \leq K e^{(\gamma-s)\tau^n}$$

d'après la démonstration du théorème, et les applications ϕ_n sont continues : ϕ_0 est l'application identiquement nulle et si ϕ_n est continue, on a

$$\phi_{n+1}(y) = i_{n+1,n} \phi_n(y) + \widetilde{v_{n+1}}(\phi_n(y), f_n(\phi_n(y)) - j_{n,0} y)$$

qui est continue ; l'application ϕ est donc continue $\square$

Théorème 1.5.- Les hypothèses sont celles du corollaire 1.4 ; si le quasi-inverse à droite $v_{k+1}(x)$ de $df_{k+1}(i_{k+1,k} x)$ est aussi un quasi-inverse à gauche de $df_k(x)$ en ce sens que pour tout x de B_k on a

$$||i_{k+1,k} + v_{k+1}(x) df_k(x)|| \leq K e^{-\beta \tau^k},$$

pour tout x de E_N vérifiant $||x||_N \leq e^{\gamma \tau^N} \delta$ et $||f_N(x)|| \leq \delta$, on a $\phi(f_N(x)) = i_N x$.

On pose $y = f_N(x)$ et on construit la suite x_n^y associée au morphisme f_N^y . On a

$$x_{n+1}^y - i_{n+1,n} x_n^y = i_{n+1,n} (x_n^y - i_{n,N} x) + v_{n+1}(x_n^y) \cdot [f_n(x_n^y) - f_n(i_{n,N} x)]$$

et

$$f_n(x_n^y) - f_n(i_{n,N} x) = df_n(x_n^y) \cdot (x_n^y - i_{n,N} x) + \int_0^1 [df_n(i_{n,N} x + t(x_n^y - i_{n,N} x)) - df_n(x_n^y)] \cdot (x_n^y - i_{n,N} x) dt,$$

d'où

$$x_{n+1}^y - i_{n+1,n} x_n^y = [i_{n+1,n} + v_{n+1}(x_n^y) df_n(x_n^y)] \cdot (x_n^y - i_{n,N} x) + v_{n+1}(x_n^y) \int_0^1 [df_n(i_{n,N} x + t(x_n^y - i_{n,N} x)) - df_n(x_n^y)] \cdot (x_n^y - i_{n,N} x) dt.$$

Il en résulte la majoration

$$\|x_{n+1}^y - i_{n+1, N} x\|_{n+1} \leq K e^{-\beta \tau^n} \|x_n^y - i_{n+1, N} x\|_n + K^2 e^{(\gamma + \alpha) \tau^n} \|x_n^y - i_{n+1, N} x\|_n^2.$$

On montre par récurrence qu'il existe $\sigma = s - \gamma$ tel que l'on ait

$$\|x_n^y - i_{n, N} x\|_n \leq e^{-\sigma \tau^n}$$

pourvu que $\|x_N^y - x\|_N = \|x\|_N$ soit inférieur à $e^{-\sigma \tau^N} = e^{\gamma \tau^N} \delta$.

En effet, si l'inégalité est vraie au rang n , on a

$$\|x_{n+1}^y - i_{n+1, N} x\|_{n+1} \leq K e^{-(\beta - \sigma) \tau^n} + K^2 e^{(\alpha + \gamma - 2\sigma) \tau^n}$$

et l'inégalité sera vérifiée au rang $n+1$ si

$$K e^{-[\beta - \sigma(\tau - 1)] \tau^n} + K^2 e^{[\alpha + \gamma - \sigma(2 - \tau)] \tau^n} \leq 1$$

ce qui est certainement réalisé si $\beta - \sigma(\tau - 1) \geq \beta - s(\tau - 1)$, soit $\sigma \leq s$, et si $\alpha + \gamma - \sigma(2 - \tau) \leq \alpha \tau + 2\gamma - s(2 - \tau)$, soit $s - \sigma \leq \alpha \frac{\tau - 1}{2 - \tau} + \frac{\gamma}{2 - \tau}$ ce qui est certainement vérifié en posant $s - \sigma = \gamma$ $\square$

La section locale ϕ donnée par le corollaire 1.4 n'est en général qu'une application continue ; il est possible de trouver une section différentiable moyennant certaines hypothèses supplémentaires, essentiellement la différentiabilité des applications $\tilde{v}_{k+1}$.

Théorème 1.6.- Soient E et F deux séquences d'espaces normés et f un morphisme de classe C^1 de $B(E)$ dans F , nul à l'origine. On suppose qu'il existe une suite d'applications

$$v_{k+1} : B_k \rightarrow L(F_k ; E_{k+1})$$

telles que $\tilde{v}_{k+1} = \text{ev} \circ (v_{k+1} \times 1_{F_k})$ soit de classe C^1 et des constantes K ,

$\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ et τ vérifiant $0 \leq K, 0 \leq \alpha, 0 < \beta, 0 \leq \gamma, 0 \leq \mu, 0 \leq \nu, 1 < \tau < 2$ et $\sup(\frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}, \mu\tau+\nu+\gamma\tau) < \frac{\beta}{\tau-1}$ telles que l'on ait

(1) l'application df_k vérifie sur B_k les conditions suivantes :

$$(i) \quad ||df_k(x)|| \leq K e^{\mu\tau^k}$$

$$(ii) \quad ||df_k(x) - df_k(y)|| \leq K e^{\alpha\tau^k} ||x-y||_k$$

(2) l'application v_{k+1} vérifie sur B_k les conditions suivantes :

$$(i) \quad ||j_{k+1,k}^{+df_{k+1}(i_{k+1,k}x)} \circ v_{k+1}(x)|| \leq K e^{-\beta\tau^k}$$

$$(ii) \quad ||v_{k+1}(x)|| \leq K e^{\gamma\tau^k}$$

$$(iii) \quad ||dv_{k+1}(x)|| \leq K e^{\nu\tau^k}$$

Il existe alors un entier N et un nombre positif δ ne dépendant que de $K, \alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ et τ et une application ϕ de classe C^1 définie sur la boule $B_N(\delta)$ de rayon δ de F_N , à valeurs dans la boule unité B de E , telle que $f \circ \phi = j_N|_{B_N(\delta)}$

On choisit des nombres positifs s et λ tels que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup(\nu, \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}) < s < \frac{\beta}{\tau-1} \\ \gamma < \lambda < -\frac{\beta}{\tau-1} \\ \sup(\alpha\tau+\gamma, \tau+\nu) < s - \lambda\tau \end{array} \right.$$

Un tel choix est possible si l'on a

$$\sup(\gamma, \nu, \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}) < \frac{\beta}{\tau-1}$$

et si la borne supérieure de $s - \lambda\tau$ est supérieure strictement à $\sup(\alpha\tau+\gamma, \mu\tau+\nu)$, soit

$$\sup(\alpha\tau + \gamma, \mu\tau + \nu) < \frac{\beta}{\tau-1} - \gamma\tau,$$

d'où la condition unique :

$$\sup(\gamma, \nu, \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}, \alpha\tau+\gamma+\gamma\tau, \mu\tau+\nu+\gamma\tau) < \frac{\beta}{\tau-1} ;$$

en remarquant que

$$\gamma \leq \alpha\tau + \gamma + \gamma\tau,$$

$$\nu \leq \mu\tau + \nu + \gamma\tau,$$

et que :

$$\alpha\tau + \gamma + \gamma\tau \leq \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau},$$

il reste la condition

$$\sup(\frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}, \mu\tau+\nu+\gamma\tau) < \frac{\beta}{\tau-1}$$

faite par hypothèse sur les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \mu, \nu$ et τ .

D'après le corollaire 1.4 on sait construire pour N assez grand une suite d'applications ϕ_n d'une boule $B_N(\delta)$ de F_N dans E_n , telle que $\phi_N = 0$ et que $i_n \phi_n$ converge uniformément vers une section ϕ de f ; de manière précise on a

$$||f \circ \phi_n(x) - j_{n,N} x||_n \leq e^{-s\tau^n}$$

$$||\phi_{n+1}(x) - i_{n+1,n} \phi_n(x)||_{n+1} \leq K e^{(\gamma-s)\tau^n}$$

L'hypothèse de différentiabilité faite sur les applications $\widetilde{v}_{k+1}$ entraîne par récurrence que les applications ϕ_n sont différentiables : c'est vrai pour ϕ_N qui est nulle et si ϕ_n est de classe C^1 on a

$$\phi_{n+1} = i_{n+1,n} \phi_n + \widetilde{v}_{n+1}(\phi_n \times (f_n \circ \phi_n - j_{n,N}))$$

qui est de classe C^1 . On va montrer que si N est assez grand, la suite

$\{d(i_n \circ \phi_n)\}_{n \geq N}$ d'applications de $B_n(\delta)$ dans $L(F_N, E)$ converge uniformément.

Pour cela on montre par récurrence que pour N assez grand, en posant

$\Lambda = e^{\lambda \tau^N}$, on a

$$(a_n) \quad ||df_n(\phi_n(x)) \circ d\phi_n(x) - j_{n,N}|| \leq \Lambda e^{-\lambda \tau^n}$$

$$(b_n) \quad ||d\phi_n(x)|| \leq \Lambda$$

et qu'alors

$$(c_n) \quad ||d\phi_{n+1}(x) - i_{n+1,n} d\phi_n(x)|| \leq \Lambda K(e^{(\nu-s)\tau^n} + e^{(\gamma-\lambda)\tau^n}) .$$

Les conditions (a) et (b) sont vérifiées pour $n = N$: on a en effet

$$(a_N) \quad ||df_N(0) \cdot 0 - j_{N,N}|| = ||j_{N,N}|| \leq 1 = \Lambda e^{-\lambda \tau^N}$$

$$(b_N) \quad ||0|| \leq \Lambda .$$

La démonstration se fait en trois étapes :

1) $((a_n), (b_n)) \implies (c_n)$. En différentiant l'expression de ϕ_{n+1} en fonction de ϕ_n il vient

$$\begin{aligned} d\phi_{n+1}(x) - i_{n+1,n} d\phi_n(x) &= dv_{n+1}(\phi_n(x)) \cdot (d\phi_n(x), f_n(\phi_n(x)) - j_{n,N}) \\ &\quad + v_{n+1}(\phi_n(x)) \cdot (df_n(\phi_n(x)) d\phi_n(x) - j_{n,N}) \end{aligned}$$

d'où, en tenant compte de (a_n) et (b_n) , la majoration

$$||d\phi_{n+1}(x) - i_{n+1,n} d\phi_n(x)|| \leq \Lambda K(e^{(\nu-s)\tau^n} + e^{(\gamma-\lambda)\tau^n}) .$$

2) $((c_k))_{k \leq n} \implies (b_{n+1})$. On fait la somme membre à membre des inégalités (c_k) pour $k \leq n$; il vient la majoration

$$||d\phi_{n+1}(x)|| \leq \Lambda K \sum_{k=N}^n (e^{(\nu-s)\tau^k} - e^{(\gamma-\lambda)\tau^k}) < \Lambda K \sum_{k=N}^{\infty} (e^{(\nu-s)\tau^k} - e^{(\gamma-\lambda)\tau^k}) .$$

Les nombres s et λ ayant été choisis tel que les exposants soient négatifs

la série converge et pour N assez grand on a

$$K \sum_{k=N}^{\infty} (e^{(v-s)\tau^k} - e^{(\gamma-\lambda)\tau^k}) \leq 1$$

d'où $||d\phi_{n+1}(x)|| \leq \Lambda$.

3) $((a_n), (b_{n+1}), (b_n)) \Rightarrow (a_{n+1})$. On a

$$\begin{aligned} df_{n+1}(\phi_{n+1}(x)) \cdot d\phi_{n+1}(x) - j_{n+1,N} &= (df_{n+1}(\phi_{n+1}(x)) - df_{n+1}(i_{n+1,n}\phi_n(x))) d\phi_{n+1}(x) \\ &+ df_{n+1}(i_{n+1,n}\phi_n(x)) d\phi_{n+1}(x) - j_{n+1,N}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre est majoré en norme par $\Lambda K^2 e^{(\alpha\tau+\gamma-s)\tau^n}$, en tenant compte de (b_{n+1}) . Le second terme, en remplaçant $d\phi_{n+1}(x)$ par son expression en fonction de ϕ_n , s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} df_{n+1}(i_{n+1,n}\phi_n(x)) d\phi_{n+1}(x) - j_{n+1,N} &= \\ df_{n+1}(i_{n+1,n}\phi_n(x)) \cdot dv_{n+1}(\phi_n(x)) \cdot (d\phi_n(x), f_n(\phi_n(x)) - j_{n,N}) \\ &+ (j_{n+1,n} + df_{n+1}(i_{n+1,n}\phi_n(x)) \cdot v_{n+1}(\phi_n(x))) \cdot (df_n(\phi_n(x)) \cdot d\phi_n(x) - j_{n,N}); \end{aligned}$$

de (a_n) et (b_n) il résulte la majoration

$$||df_{n+1}(i_{n+1,n}\phi_n(x)) d\phi_{n+1}(x) - j_{n+1,N}|| \leq \Lambda K^2 e^{(\mu\tau+v-s)\tau^n} + \Lambda K e^{-(\beta+\lambda)\tau^n}.$$

On a donc

$$||df_{n+1}(\phi_{n+1}(x)) d\phi_{n+1}(x) - j_{n+1,N}|| \leq \Lambda [K^2 e^{(\alpha\tau+\gamma-s)\tau^n} + K^2 e^{(\mu\tau+v-s)\tau^n} + K e^{-(\beta+\lambda)\tau^n}]$$

et ce majorant sera inférieur à $\Lambda e^{-\lambda\tau^{n+1}}$ si on a

$$K^2 e^{(\alpha\tau+\gamma-s+\lambda\tau)\tau^n} + K^2 e^{(\mu\tau+v-s+\lambda\tau)\tau^n} + K e^{(\lambda(\tau-1)-\beta)\tau^n} \leq 1$$

ce qui est vérifié pourvu que n soit supérieur à un certain nombre N_0 puis-que s et λ ont été choisis pour que les exposants soient négatifs.

L'entier N ayant été choisi assez grand pour que les démonstrations 2) et 3) soient possibles, la suite d'applications $d(i_n \phi_n)$ vérifiant

$$\begin{aligned} & ||d(i_{n+1} \phi_{n+1})(x) - d(i_n \phi_n)(x)|| = ||i_{n+1} d\phi_{n+1}(x) - i_n d\phi_n(x)|| \\ & \leq ||d\phi_{n+1}(x) - i_{n+1,n} d\phi_n(x)|| \leq \Lambda K (e^{(v-s)\tau^n} + e^{(\gamma-\lambda)\tau^n}) \end{aligned}$$

est une suite uniformément convergente et la section ϕ limite des applications $i_n \circ \phi_n$ est de classe C^1 $\square$

Théorème 1.6.- Les hypothèses sont celles du théorème 2.1 ; si le quasi-inverse à droite $v_{k+1}(x)$ de $df_{k+1}(i_{k+1,k}x)$ est aussi un quasi-inverse à gauche de $df_k(x)$, c'est-à-dire si l'on a

$$||i_{k+1,k} + v_{k+1}(x) df_k(x)|| \leq K e^{-\beta \tau^k}$$

on a

$$d\phi(x) = - \lim_{n \rightarrow \infty} i_{n+1} \circ \gamma_{n+1}(\phi_n(x)) \circ j_{n,N}.$$

On a en effet

$$\begin{aligned} d\phi_{n+1}(x) + v_{n+1}(\phi_n(x)) j_{n,N} &= [i_{n+1,n} + v_{n+1}(\phi_n(x)) df_n(\phi_n(x))] \cdot d\phi_n(x) + \\ &+ dv_{n+1}(\phi_n(x)) \cdot (d\phi_n(x), f_n(\phi_n(x)) - j_{n,N}) \end{aligned}$$

qui est majoré en norme par

$$\Lambda K e^{-\beta \tau^n} + \Lambda K^2 e^{(v-s)\tau^n},$$

quantité qui tend vers zéro quand n tend vers l'infini $\square$

§ 2 - OPERATEURS D'APPROXIMATION.

Définition 2.1.- Soit $E^* = \{E^k\}_{k=0}^r$, avec $0 \leq r \leq \infty$, une chaîne d'espaces de Banach, c'est-à-dire une suite d'espaces de Banach E^k telle que pour $k > \ell$ l'espace vectoriel sous-jacent à E^k soit un sous-espace de l'espace vectoriel sous-jacent à E^ℓ et que l'inclusion canonique de E^k dans E^ℓ soit continue et d'image dense. Nous dirons que E^* admet des données d'approximations si pour tout entier N il existe une famille d'applications linéaires $\{L_a\}_{a \in \mathbb{R}^+}$ de E^r dans lui-même, telle que pour $k + \alpha \leq r$ et $\alpha \leq N$ on ait

$$A.1. \quad \|L_a \cdot x\|_{k+\alpha} \leq \frac{C(k, \alpha)}{a^\alpha} \|x\|_k$$

$$A.2. \quad \|L_a \cdot x - x\|_k \leq C(k, \alpha) a^\alpha \|x\|_{k+\alpha}$$

L'espace E^r étant dense dans E^0 , la condition A.1 entraîne que les applications L_a admettent des extensions continues de E^0 dans E^r ; la relation A.2 demeure valable pour ces extensions.

Lemme 2.2.- (Sergeraert). Soit $\{E^k\}_{k=0}^s$ une chaîne d'espaces de Banach admettant des données d'approximation. Il existe des constantes $\gamma_{p,q,r}$ avec $p \leq q \leq r$ éléments de $\mathbb{N}^+$ telles que

$$\|x\|_q \leq \gamma_{p,q,r} \|x\|_p^{\frac{r-q}{r-p}} \|x\|_r^{\frac{q-p}{r-p}}.$$

Les entiers p, q et r étant fixés, on choisit une donnée d'approximation $\{L_a\}_{a \in \mathbb{R}^+}$ correspondant à un entier N supérieur à r ; pour tout a de $\mathbb{R}^+$ on a

$$\begin{aligned} \|x\|_q &\leq \|L_a \cdot x - x\|_q + \|L_a x\|_q \\ &\leq C(q, r-q) a^{r-q} \|x\|_r + \frac{C(p, q-p)}{a^{q-p}} \|x\|_p \end{aligned}$$

et on calcule minimum de cette fonction de a $\square$

Définition 2.3. - Soit E^+ une chaîne d'espaces de Banach. On appelle projecteur de E^* une suite $P^* = \{P^k\}_{k=0}^r$ de projecteurs P^k de E^k telle que pour $k > \ell$ la restriction de P^ℓ à E^k soit P^k . L'image d'un projecteur est appelé un facteur direct de E^* ; c'est encore une chaîne d'espaces de Banach.

Théorème 2.4. - Soient E^* une chaîne d'espaces de Banach admettant des données d'approximation et E^* un facteur direct de E^* . La chaîne d'espaces de Banach E^* admet des données d'approximation.

Soit ϵ^k l'inclusion canonique de E^k dans E^k et π^k la projection de E^k sur E^k induite par le projecteur. Soit $\{L_a\}_{a \in R^+}$ une donnée d'approximation sur E^* associée à un entier N . On pose $L_a = \pi^r \circ L_a \circ \epsilon^r$. C'est une application linéaire de E^r dans lui-même et l'on a pour $k + \alpha \leq r$ et $\alpha \leq N$ les majorations suivantes

$$||L_a \cdot x||_{k+\alpha} \leq ||\pi^{k+\alpha}|| \frac{C(k, \alpha)}{a^\alpha} ||\epsilon^k|| ||x||_k$$

et

$$||L_a \cdot x - x|| \leq ||\pi^k|| C(k, \alpha) a^\alpha ||\epsilon^{k+\alpha}|| ||x||_{k+\alpha}$$

d'où les relations A.1 et A.2 $\square$

Théorème 2.5. - Un produit fini de chaînes d'espaces de Banach admettant des données d'approximation est une chaîne d'espaces de Banach admettant des données d'approximation.

Si $\{L_{i,a}\}_{a \in R^+}$ est une donnée d'approximation associée à un entier N sur la chaîne E_i^* , alors $\{L_a\}_{a \in R^+}$ avec $L_a = \prod_i L_{i,a}$ est une donnée d'approximation

ximation associée à N sur la chaîne produit $\prod_1 E_i^*$ $\square$

Proposition 2.6.- La chaîne $\{\hat{\mathcal{D}}^k(n, F)\}_{k=0}^\infty$ des complétés des espaces d'applications différentiables à support compact de $\mathbb{R}^n$ dans un espace de Banach F admet des données d'approximation.

Il suffit de construire les applications L_a sur $\mathcal{D}^\infty(n, F)$ puis de prendre leurs extensions $\hat{L}_a$ au complété $\hat{\mathcal{D}}^\infty(n, F)$.

Soit θ une fonction numérique de classe C^∞ , de support contenu dans $]0, +1[$ et telle que $\int_0^1 \theta(x) dx = 1$ et $\int_0^1 x^n \theta(x) dx = 0$ pour $1 \leq n < N$; l'existence d'une telle fonction θ est établie au lemme 2.7. On considère sur $\mathbb{R}^n$ la fonction θ définie par

$$\theta(x^1, \dots, x^n) = \theta(x^1) \dots \theta(x^n)$$

puis pour tout a de $\mathbb{R}^+$, la fonction θ_a définie par

$$\theta_a(x) = \frac{1}{a^n} \theta\left(\frac{x}{a}\right).$$

Pour tout f élément de $\mathcal{D}^\infty(n, F)$ on pose

$$(S_a \cdot f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_a(x-y) f(y) dy.$$

Les propriétés du produit de convolution donnent

$$d^k(S_a \cdot f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta(x-y) d^k f(y) dy$$

et

$$d^{k+\alpha}(S_a \cdot f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} d^\alpha \theta_a(x-y) d^k f(y) dy,$$

d'où

$$\|S_a \cdot f\|_{k+\alpha} \leq \sup_{0 \leq \ell \leq \alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \|d^\ell \theta_a(y)\| dy \|f\|_k.$$

On a $d_a^\ell \Theta_a(x) = \frac{1}{a^{n+\ell}} d_a^\ell \Theta(\frac{x}{a})$; par le changement de variable $z = \frac{y}{a}$ il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||d_a^\ell \Theta_a(y)|| dy = \frac{1}{a^\ell} \int_{\mathbb{R}^n} ||d^\ell \Theta(y)|| dy \leq \frac{||\Theta||_\alpha}{a^\ell}$$

d'où

$$(1) \quad ||S_a \cdot f||_{k+\alpha} \leq ||\Theta||_\alpha \sup_{0 \leq \ell \leq \alpha} \left\{ \frac{1}{a^\ell} \right\} ||f||_k .$$

Pour tout $h \leq k$ on a

$$d^h(S_a \cdot f - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Theta_a(y) (d^h f(x-y) - d^h f(x)) dy .$$

La formule de Taylor nous donne

$$d^h f(x-y) - d^h f(x) = \sum_{\beta=1}^{\alpha-1} \frac{1}{\beta!} d^{h+\beta} f(x) \cdot (-y)^\beta + \frac{1}{\alpha!} R^{h+\alpha}(x,y) \cdot (-y)^\alpha$$

avec

$$||R^{h+\alpha}(x,y)|| \leq \sup_z ||d^{h+\alpha} f(z)|| .$$

Quand on intègre

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Theta_a(y) d^{h+\beta} f(x) \cdot (-y)^\beta dy$$

on considère des expressions du type suivant :

$$(-1)^\beta \frac{\partial^\beta}{\partial i_1 \dots \partial i_\beta} d^h f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a^n} \Theta(\frac{y}{a}) \dots \Theta(\frac{y}{a}) y^i_1 \dots y^i_\beta dy ;$$

l'intégrale multiple est un produit d'intégrales simples et comme $1 \leq \beta \leq \alpha-1 < N$, au moins l'une de celles-ci est nulle. Il reste donc

$$d^h(S_a \cdot f - f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Theta_a(y) \frac{1}{\alpha!} R^{h+\alpha}(x,y) \cdot (-y)^\alpha dy$$

d'où

$$(2) \quad ||S_a \cdot f - f||_k \leq \frac{||\Theta||_0}{\alpha!} a^\alpha ||f||_{k+\alpha}$$

On pose $L_a = S_a$ si $a \leq 1$ et $L_a = \frac{1}{a^N} S_a$ si $a \geq 1$.

Pour $a \leq 1$ les relations (1) et (2) entraînent A.1 et A.2 (on a en effet

$\sup_{0 \leq \ell \leq \alpha} \left\{ \frac{1}{a^\ell} \right\} = \frac{1}{a^\alpha}$ dans ce cas) ; pour $a \geq 1$ et $\alpha \leq N$ on a

$$\|L_a \cdot f\|_{k+\alpha} = \frac{1}{a^N} \|S_a \cdot f\|_{k+\alpha} \leq \frac{\|\theta\|_\alpha}{a^N} \|f\|_k \leq \frac{\|\theta\|_\alpha}{a^\alpha} \|f\|_k$$

puisque $\sup_{0 \leq \ell \leq \alpha} \left\{ \frac{1}{a^\ell} \right\} = 1$ lorsque $a \geq 1$, et

$$\begin{aligned} \|L_a \cdot f - f\|_k &\leq \left(1 - \frac{1}{a^N}\right) \|S_a \cdot f\|_k + \|S_a \cdot f - f\|_k \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{a^N}\right) \|\theta\|_0 \|f\|_k + \frac{\|\theta\|_0}{\alpha!} a^\alpha \|f\|_{k+\alpha} \\ &\leq \|\theta\|_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha!}\right) a^\alpha \|f\|_{k+\alpha} \end{aligned}$$

La famille $\{L_a\}_{a \in \mathbb{R}^+}$ est donc une donnée d'approximation associée à l'entier N .

Lemme 2.7.- Quel que soit l'entier N , il existe une fonction numérique θ de classe C^∞ , de support contenu dans $]0,1[$, telle que $\int_0^1 \theta(x) dx = 1$ et $\int_0^1 x^n \theta(x) dx = 0$ pour $1 \leq n \leq N$.

Soit E l'espace vectoriel des applications de classe C^∞ , de support contenu dans $]0,1[$. Les formes linéaires ϕ_n définies sur E par

$$\phi_n = \int_0^1 x^n \theta(x) dx$$

sont indépendantes : on a

$$(\sum a_n \phi_n)(\theta) = \int_0^1 (\sum a_n x^n) \theta(x) dx ;$$

si le polynôme $\sum a_n x^n$ n'est pas identiquement nul, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ contenu dans $]0,1[$ tel que $|\sum a_n x^n| \geq \lambda > 0$ sur $[\alpha, \beta]$ et en prenant une fonction θ positive, non nulle, de support contenu dans $[\alpha, \beta]$, on a

$$\left| \int_0^1 (\sum a_n x^n) \theta(x) dx \right| = \int_\alpha^\beta |\sum a_n x^n| \theta(x) dx \geq \lambda \int_\alpha^\beta \theta(x) dx > 0 ;$$

on a donc $\sum a_n \phi_n = 0$ si et seulement si $a_n = 0$ pour tout n .

L'application linéaire ϕ de E dans $\mathbb{R}^N$ définie par

$$\phi(\theta) = (\phi_0(\theta), \phi_1(\theta), \dots, \phi_{N-1}(\theta))$$

est de rang N : elle est surjective et il existe donc θ telle que

$$\phi(\theta) = (1, 0, \dots, 0) \quad \square$$

Théorème 2.8.- Soit E un espace fibré vectoriel différentiable de classe C^r , de base compacte. La chaîne $C^*(E) = \{C^k(E)\}_{k=0}^r$ des espaces de sections différentiables de E admet des données d'approximations.

$$\text{Soit } A = \{(U_i, V_i, \phi_i, \psi_i)\}_{i=1}^n \text{ tel que } \{(U_i, \phi_i)\}_{i=1}^n$$

soit un atlas de la base B du fibré E , $\{(U_i, \psi_i)\}_{i=1}^n$ un atlas de E et $\{V_i\}_{i=1}^n$ un recouvrement de B par des ouverts relativement compacts tel que $\bar{V}_i$ soit contenu dans U_i ; on note $\mathbb{R}^{n_i}$ le but de ϕ_i , K_i le compact image de $\bar{V}_i$ par ϕ_i et F_i la fibre modèle pour la carte ψ_i . Soit $\{f_i\}_{i=1}^n$ une partition de l'unité de classe C^r subordonnée au recouvrement $\{V_i\}_{i=1}^n$ et $\{g_i\}_{i=1}^n$ une famille d'applications de classe C^r de $\mathbb{R}^{n_i}$ dans $\mathbb{R}$ valant 1 sur K_i et 0 hors de $\phi_i(U_i)$.

Soit s_i l'application de U_i dans F_i associée par la carte ψ_i à une section s élément de $C^k(E)$; l'application $f_i s_i$ de support contenu dans V_i définit via la carte ϕ_i un élément σ_i de $\hat{\mathcal{D}}^k(n_i, F_i)$. Soit ε^k l'application linéaire de $C^k(E)$ dans $\prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{D}}^k(n_i, F_i)$ qui associe $(\sigma_i)_{i=1}^n$ à s ; cette application est continue.

Etant donné un élément $(\theta_i)_{i=1}^n$ de $\prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{D}}^k(n_i, F_i)$, chaque application $g_i \theta_i$ de support contenu dans $\phi_i(U_i)$ définit via ϕ_i^{-1} une section s_i de

classe C^k de E . Soit π^k l'application linéaire de $\prod_{i=1}^n \hat{\mathcal{D}}^k(n_i, F_i)$ dans $C^k(E)$ qui associe à $(\theta_i)_{i=1}^n$ la section $\sum_{i=1}^s s_i$; cette application est continue.

Il est clair enfin que $\pi^k \circ \varepsilon^k = 1_{C^k(\varepsilon)}$ pour tout k et que les suites $\pi^* = \{\pi^k\}_{k=0}^r$ et $\varepsilon^* = \{\varepsilon^k\}_{k=0}^r$ sont des morphismes de chaînes. Il en résulte que $C^*(E)$ est un facteur direct de $\prod_{i=1}^n \mathcal{D}^*(n_i, F_i)$; la chaîne $C^*(E)$ admet donc des données d'approximation d'après les théorèmes 2.4 et 2.5 et la proposition 2.6. $\square$

§ 3 - LE THEOREME DE NASH.-

Soient $\{E^k\}_{k=0}^\infty$ et $\{F^k\}_{k=0}^\infty$ deux chaînes d'espaces de Banach ; on notera ρ_k la norme E^k ainsi que celle de F^k . Soit Ω un voisinage ouvert de l'origine dans E^∞ de la forme $\Omega = E^\infty \cap \Omega^k$ où Ω^k est un ouvert de E^k , et soit f une application de classe C^2 (au sens des espaces de Fréchet) de Ω dans F^∞ . On fait les hypothèses suivantes :

H.1. La chaîne $\{E^k\}_{k=0}^\infty$ admet des données d'approximation.

H.2. Il existe des constantes a, b, c et A_k , avec $c \geq b$, telles que l'on ait

$$(H.2.1.) \begin{cases} \forall x \in \Omega & \forall \xi \in E^\infty \\ \rho_k[df(x) \cdot \xi] \leq A_k \sum_{\alpha+\beta \leq k+b} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\xi) \end{cases}$$

$$(H.2.2.) \begin{cases} \forall x \in \Omega & \forall (\xi, \eta) \in E^\infty \times E^\infty \\ \rho_k[d^2f(x) \cdot (\xi, \eta)] \leq A_k \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq k+c} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\xi) \rho_\gamma(\eta) \end{cases}$$

H.3. Il existe une application v de Ω dans $L(F^\infty, E^\infty)$ telle que $v(x)$ soit un inverse à droite de $df(x)$ et il existe une constante d telle que l'on ait

$$(H.3.) \begin{cases} \forall x \in \Omega & \forall \phi \in F^\infty \\ \rho_k[v(x) \cdot \phi] \leq A_k \sum_{\alpha+\beta \leq k+d} \sup\{1, \rho_{a+b+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\phi) \end{cases}$$

les constantes a et A_k étant celles de l'hypothèse H.2.

Avant d'énoncer le théorème de fonctions implicites, nous allons dériver des hypothèses certaines propriétés de l'application f .

Proposition 3.1.- Soit Ω^k l'ouvert de E^k intersection de E^k et de Ω^k pour $k \geq k_0$. L'application f admet pour tout $k \geq \sup(k_0, a+b)$ une

extension continue de Ω^k dans F^{k-a-b} .

Soit $B^k(n)$ la boule de rayon n dans E^k . Il suffit de montrer que f admet pour tout n une extension continue de $\Omega^k \cap B^k(n)$ dans F^{k-a-b} . Pour tout x et tout y dans $\Omega \cap B^k(n)$ on a

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 df(x + \tau(y-x)) \cdot (y-x) d\tau$$

d'où, d'après (H.2.1) :

$$\rho_{k-a-b}[f(y) - f(x)] \leq A_{k-a-b} \sum_{\alpha+\beta \leq k-a} \sup_{z \in [x,y]} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(z)\} \rho_{\beta}(y-x) .$$

L'indice α valant au plus $k-a$, on a $\rho_{a+\alpha}(z) \leq \rho_k(z) \leq n$. Il existe donc une constante K telle que

$$\rho_{k-a-b}[f(y) - f(x)] \leq K \rho_k(y-x)$$

ce qui entraîne la conclusion $\square$

Proposition 3.2.- Pour tout $x \in \Omega$, l'application linéaire $df(x)$ admet pour tout $k \geq \sup(k_0, a+c)$ une extension continue de E^{k-a} dans F^{k-a-c} l'application ainsi définie de Ω dans $L(E^{k-a}; F^{k-a-c})$ admet une extension continue $\delta^{k-a} f$ de Ω^k dans $L(E^{k-a}; F^{k-a-c})$ vérifiant la condition de Lipschitz suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega^k, \forall y \in \Omega^k, \forall \xi \in E^{k-a} \\ \rho_{k-a-c}[(\delta^{k-a} f(y) - \delta^{k-a} f(x)) \cdot \xi] \leq A_{k-a-c} \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq k-a} \sup_{z \in [x,y]} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(z)\} \rho_{\beta}(y-x) \rho_{\gamma}(\xi) \end{array} \right.$$

L'hypothèse (H.2.1) entraîne que pour tout $x \in \Omega$, l'application linéaire $df(x)$ admet une extension continue de E^{k-a} dans F^{k-a-b} donc dans F^{k-a-c} puisque $b \leq c$.

Soit $B^k(n)$ la boule de rayon n dans E^k . Pour tout x et tout y dans $\Omega \cap B^k(n)$ on a

$$[df(y)-df(x)]\xi = \int_0^1 d^2 f(x+t(y-x)) \cdot (y-x, \xi) dt$$

d'où, d'après (H.2.2) :

$$\rho_{k-a-c}[(df(y)-df(x))\cdot\xi] \leq A_{k-a-c} \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq k-a} \sup_{z \in [x,y]} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(z)\} \rho_{\beta}(x-y) \rho_{\gamma}(\xi).$$

On a $\rho_{a+\alpha}(z) \leq \rho_k(z) \leq n$; il existe donc une constante K telle que l'on ait

$$\rho_{k-a-c}[(df(y)-df(x))\xi] \leq K \rho_k(y-x) \rho_{k-a}(\xi)$$

ce qui entraîne l'existence de l'extension continue $\delta^{k-a}f$ de df .

La majoration de $\rho_{k-a-c}[(df(y)-df(x))\xi]$ donne par passage à la limite la majoration de $\rho_{k-a-c}[(\delta^{k-a}f(y)-\delta^{k-a}f(x))\xi] \square$

Corollaire 3.3.- Pour tout $k \geq \sup(k_0, a+c)$ l'extension f^k de Ω^k
dans F^{k-a-c} est de classe C^1 et a pour différentielle l'application
 $\delta^{k-a}f \circ i^{k-a,k}$, où $i^{k-a,k}$ est l'inclusion canonique de E^k dans E^{k-a} .

On a en effet, pour $x \in \Omega^\infty$ et $y \in E^\infty$, y petit

$$f(x+y) - f(x) - df(x) \cdot y = \int_0^1 [df(x+ty))df(x)] \cdot y dt$$

d'où, par passage à la limite, pour $x \in \Omega^k$ et $y \in E^k$

$$f^k(x+y) - f^k(x) - \delta^{k-a}f(x) \circ i^{k-a,k} y = \int_0^1 [\delta^{k-a}f(x+ty) - \delta^{k-a}f(x)] \circ i^{k-a,k} y dt.$$

Si on se limite à prendre x et y dans la boule $B^k(n)$, on a d'après l'étude précédente

$$\rho_{k-a-c}[f^k(x+y)-f^k(x)-\delta^{k-a}f(x) \circ i^{k-a,k} y] \leq K[\rho_k(y)]^2$$

qui montre que f^k est différentiable et que $df^k(x) = \delta^{k-a}f(x) \circ i^{k-a,k}$.

L'application df^k étant continue d'après la proposition 2, on a bien f^k de classe $C^1 \square$

Théorème 3.4.- Soit f une application vérifiant les hypothèses H.1, H.2 et H.3 et soit $q \geq 1 + E(d + (\sqrt{a+c+d} + \sqrt{2(b+d)})^2)$, où E est la fonction partie entière. Quel que soit l'entier $p \geq \sup(k_0, a+b+d)$, il existe un nombre $\delta > 0$ ne dépendant que des constantes a, b, c, d, A_k , de p et de q , tel que si $\rho_{p+q}(f(0)) < \delta$ il existe $x \in \Omega^p$ vérifiant $f^p(x) = 0$.

Un entier $p \geq \sup(k_0, a+b+d)$ étant fixé, on pose E_k l'espace normé ayant pour espace vectoriel sous-jacent celui de E^∞ et pour norme

$$(4.1) \quad ||x||_k = \sum_{r=p}^{p+q+a+c} e^{-(r-p)\tau^k} \rho_r(x) \quad \text{avec } 1 < \tau < 2.$$

Pour $r \leq p+q+a+c$, on a les majorations :

$$(4.2) \quad \rho_r(x) \leq e^{\sup(0, r-p)\tau^k} ||x||_k ;$$

en particulier, si x appartient à la boule unité de E_k , on a

$$\rho_{k_0}(x) \leq e^{\sup(0, k_0-p)\tau^k} = 1$$

puisque $p \geq k_0$. Nous supposons que Ω^{k_0} contient la boule unité ; avec cette hypothèse, f sera définie sur les boules unité des espaces E_k . On a aussi

$$||x||_k \leq \left[\sum_{r=p}^{p+q+a+c} e^{-(r-p)\tau^k} \right] \rho_{p+q+a+c}(x)$$

$$\rho_{p+q+a+c}(x) \leq e^{(q+a+c)\tau^k} ||x||_k$$

qui montrent que les normes $||x||_k$ et $\rho_{p+q+a+c}$ sont équivalentes.

On pose de même F_k l'espace normé ayant pour espace vectoriel sous-jacent celui de F^∞ et pour norme

$$(4.3) \quad ||x||_k = \sum_{s=p-a-b}^{p+q} e^{-(s-p+a+b)\tau^k} \rho_s(y).$$

Pour $s \leq p+q$, on a les majorations :

$$(4.4) \quad \rho_s(y) \leq e^{\sup(0, s-p+a+b)\tau^k} ||y||_k$$

et les normes $||\cdot||_k$ et ρ_{p+q} sont équivalentes.

Soient $E_.$ et $F_.$ les séquences d'espaces normés définies respectivement par la suite des E_k et $E_\infty = E^p$, la suite des F_k et $F_\infty = F^{p-a-b}$; l'application f définit un morphisme $f_.$ de classe C^1 de $B(E_.)$ dans $F_.$ (cela résulte de la proposition 3.1, du corollaire 3.3 et de l'équivalence des normes $|||_k$ et $\rho_{p+q+a+c}$ dans E_k et des normes $|||_k$ et ρ_{p+q} dans F_k). On va montrer que q étant choisi comme il est dit dans l'énoncé, on peut choisir τ pour que $f_.$ vérifie les hypothèses du théorème de fonctions implicites pour les morphismes de séquences d'espaces normés (théorème 1.3).

Les majorations que l'on va devoir pratiquer feront un usage constant du lemme suivant, auquel on ne fera pas référence à chaque fois.

Lemme 3.5.- Soit $\{\beta_i\}_{i=1}^n$ une suite de nombres positifs et soit $\beta = \inf_i \beta_i$. Pour toute suite de nombres positifs $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ telle que

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \leq \alpha \quad \text{on a}$$

$$\sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha_i - \beta_i) \leq \sup(0, \alpha - \beta) .$$

Si $\alpha_i \geq \alpha'_i$ on a

$$\sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha_i - \beta_i) \geq \sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha'_i - \beta_i) ;$$

il suffit donc de considérer le cas des suites $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ telles que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = \alpha$.

Par ailleurs, on a toujours $\alpha_i - \beta_i \leq \alpha_i - \beta$, donc

$$\sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha_i - \beta_i) \leq \sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha_i - \beta) .$$

Pour $n = 2$ on a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha_i - \beta_i) &\leq \sup_{0 \leq \lambda \leq \alpha} [\sup(0, \lambda - \beta) + \sup(0, \alpha - \lambda - \beta)] \\ &= \sup_{0 \leq \lambda \leq \alpha} (0, \alpha - \lambda - \beta, \lambda - \beta, \alpha - 2\beta) = \sup(0, \alpha - \beta) . \end{aligned}$$

On raisonne maintenant par récurrence sur n : si la propriété est vraie pour $n - 1$ on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sup(0, \alpha_i - \beta_i) &= \sup(0, \alpha_1 - \beta_1) + \sum_{i=2}^n \sup(0, \alpha_i - \beta_i) \\ &\leq \sup(0, \alpha_1 - \beta_1) + \sup(0, \alpha - \alpha_1 - \beta) \end{aligned}$$

et on applique le lemme pour $n = 2$ $\square$

Détermination de α . On doit avoir une condition de Lipschitz de la forme

$$||df_k(x) - df_k(y)|| \leq K e^{\alpha \tau^k} ||x - y||_k$$

pour x et y éléments de la boule unité B_k de E_k . Par la proposition 3.2 et en utilisant des majorations (4.2), on a

$$\begin{aligned} \rho_s |(df(x) - df(y)) \cdot \xi| &\leq A_s \sum_{\alpha + \beta + \gamma \leq s + c} e^{[\sup(0, \alpha + \alpha - p) + \sup(0, \beta - p) + \sup(0, \gamma - p)] \tau^k} ||x - y||_k ||\xi||_k \\ &\leq C e^{\sup(0, s + c + a - p) \tau^k} ||x - y||_k ||\xi||_k \end{aligned}$$

donc

$$e^{-(s - p + a + b) \tau^k} \rho_s [(df(x) - df(y)) \cdot \xi] \leq C e^{(c - b) \tau^k} ||x - y||_k ||\xi||_k$$

d'où

$$|| (df(x) - df(y)) \cdot \xi ||_k \leq K e^{(c - b) \tau^k} ||x - y||_k ||\xi||_k .$$

On peut donc poser

(4.5)

$$\boxed{\alpha = c - b}$$

Détermination de γ . Soit $\{L_t\}_{t \geq 0}$ une donnée d'approximation pour la chaîne $\{E^k\}_{k=0}^\infty$. On pose $v_{k+1}(x) = L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x)$ et l'on a pour $r \geq p$:

$$\begin{aligned}
\rho_r \left[L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x) \xi \right] &\leq C e^{(r-p)\tau^{k+1}} \rho_p [v(x) \xi] \\
&\leq C e^{(r-p)\tau^{k+1}} \sum_{\alpha+\beta \leq p+d} e^{[\sup(0, a+b+\alpha-p) + \sup(0, \beta-p+a+b)] \tau^k} \|\xi\|_k \\
&\leq C e^{(r-p)\tau^{k+1}} e^{(a+b+d)\tau^k} \|\xi\|_k
\end{aligned}$$

donc

$$e^{-(r-p)\tau^{k+1}} \rho_r \left[L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x) \xi \right] \leq C e^{(a+b+d)\tau^k} \|\xi\|_k$$

d'où

$$\|v_{k+1}(x) \cdot \xi\|_{k+1} \leq K e^{(a+b+d)\tau^k} \|\xi\|_k.$$

On peut donc poser

(4.6)

$$\boxed{\gamma = a+b+d}$$

Détermination de β . On doit évaluer $\rho_s [\xi - df(x) \cdot v_{k+1}(x) \cdot \xi]$ pour $p-a-b \leq s \leq p+q$. Deux cas se présentent suivant que $s \leq p+q-b-d$ ou que $s > p+q-b-d$

Premier cas : $s \leq p+q-b-d$. On écrit

$$\xi - df(x) L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x) \xi = df(x) \cdot [v(x) \xi - L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x) \xi]$$

il vient

$$(4.7) \quad \rho_s [\xi - df(x) v_{k+1}(x) \xi] \leq A_s \sum_{\alpha+\beta \leq s+b} e^{[\sup(0, a+\alpha-p)] \tau^k} \rho_\beta [v(x) \xi - L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x) \xi].$$

Comme $\beta \leq s+b \leq p+q-d$, on a

$$(4.8) \quad \rho_\beta [v(x) \xi - L_{e^{-\tau^{k+1}}} v(x) \xi] \leq C e^{-(p+q-d-\beta)\tau^{k+1}} \rho_{p+q-d} [v(x) \cdot \xi]$$

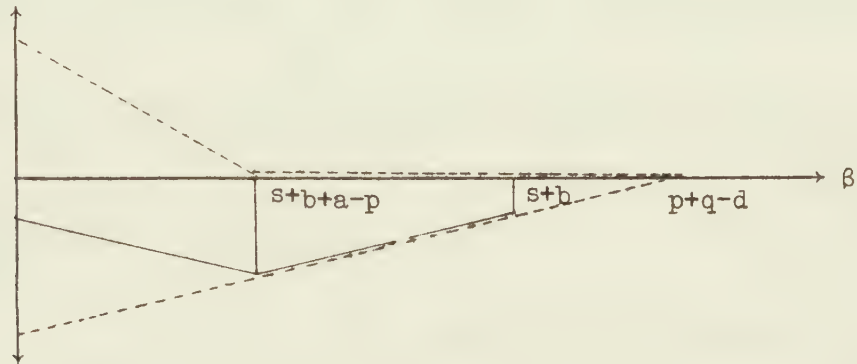
avec

$$\begin{aligned}
(4.9) \quad \rho_{p+q-d} [v(x) \cdot \xi] &\leq C \sum_{\alpha+\beta \leq p+q} e^{[\sup(0, a+b+\alpha-p) + \sup(0, \beta-p+a+b)] \tau^k} \|\xi\|_k \\
&\leq C e^{(q+a+b)\tau^k} \|\xi\|_k
\end{aligned}$$

En réunissant (4.7), (4.8) et (4.9) on a une majoration où apparaissent des termes de la forme

$$\sup(0, s+b+a-p-\beta) - (p+q-d-\beta)\tau$$

qu'il faut majorer quand β varie de 0 à $s+b$. Comme $0 \leq s+b-a-p \leq s+b \leq p+q-d$ (puisque $p \geq a+b \geq a$), on a graphiquement :



Le maximum est donc atteint soit pour $\beta = 0$, soit pour $\beta = s+b$. Pour $\beta = 0$ on a $s+b+a-p-(p+q-d)\tau$; pour $\beta = s+b$, on a $-(p+q-d-s-b)\tau = (s+b)\tau - (p+q-d)\tau$. Comme $a-p \leq 0$ et $\tau > 1$ c'est la valeur pour $\beta = s+b$ qui domine. On a donc

$$\rho_s[\xi - df(x)v_{k+1}(x)\xi] \leq C e^{[q+a+b-(p+q-d-s-b)]\tau^k} \|\xi\|_k.$$

d'où

$$e^{-(s-p+a+b)\tau^{k+1}} \rho_s[\xi - df(x)v_{k+1}(x)\xi] \leq C e^{[-(q+a)(\tau-1)+b+d\tau]\tau^k} \|\xi\|_k.$$

On doit donc avoir

$$(4.10) \quad \beta \leq (q+a)(\tau-1) - (b+d\tau).$$

Deuxième cas : $s > p+q-b-d$. On majore directement $\rho_s[\xi - df(x)v_{k+1}(x)\xi]$ par $\rho_s(\xi) + \rho_s(df(x)v_{k+1}(x)\xi)$. Le terme $\rho_s(\xi)$ intervient dans les majorations par

$$e^{-(s-p+a+b)\tau^{k+1}} \rho_s(\xi) \leq e^{-(s-p+a+b)(\tau-1)^k} \|\xi\|_k,$$

quantité inférieure à $e^{[-(q+a)(\tau-1)+d(\tau-1)]\tau} ||\xi||_k$ lorsque $s \geq p+q-b-d$; on doit donc avoir

$$(4.11) \quad \beta \leq (q+a)(\tau-1) - d(\tau-1)$$

condition toujours vérifiée si (4.10) l'est. Le terme $\rho_s[df(x)v_{k+1}(x)\xi]$ est majoré par

$$(4.12) \quad \rho_s[df(x)v_{k+1}(x)\xi] \leq A_s \sum_{\alpha+\lambda \leq s+b} e^{[\sup(0, a+\alpha-p)]\tau^k} \rho_\lambda[v_{k+1}(x)\xi] ;$$

pour majorer $\rho_\lambda(v_{k+1}(x)\xi)$ on distingue deux cas. Si $\lambda \leq p+q-d$, on a

$$\begin{aligned} \rho_\lambda \left[L_{e^{-\tau}}^{k+1} v(x)\xi \right] &\leq C \rho_\lambda[v(x).\xi] \\ &\leq C \sum_{\alpha+\gamma \leq \lambda+d} e^{[\sup(0, a+b+\alpha-p)+\sup(0, \gamma-p+a+b)]\tau^k} ||\xi||_k \\ &\leq C e^{\sup(0, \lambda+d-p+a+b)\tau^k} ||\xi||_k . \end{aligned}$$

En reportant dans (4.12) on a des termes de la forme

$$\begin{aligned} e^{[\sup(0, a+\alpha-p)+\sup(0, \lambda+d-p+a+b)]\tau^k} ||\xi|| &\leq e^{\sup(0, s+b-p+a+b+d)\tau^k} ||\xi||_k \\ &= e^{(s+b-p+a+b+d)\tau^k} ||\xi||_k \end{aligned}$$

puisque $s > p+q-b-d$ entraîne $s+b-p+a+b+d > q+b+a \geq 0$. Après multiplication de $\rho_s(df(x)v_{k+1}(x)\xi)$ par $e^{-(s-p+a+b)\tau^{k+1}}$ ce majorant devient

$$e^{[-(s-p+a+b)(\tau-1)+b+d]\tau^k} ||\xi||_k$$

quantité inférieure à $e^{[-(q+a)(\tau-1)+b+d\tau]\tau^k} ||\xi||_k$ lorsque $s \geq p+q-b-d$. On retrouve donc la condition (4.10). Enfin, si $\lambda > p+q-d$, on a

$$\begin{aligned} \rho_\lambda \left[L_{e^{-\tau^{k+1}v(x)\xi}} \right] &\leq C e^{(\lambda-p-q+d)\tau^{k+1}} \rho_{p+q-d}(v(x)\xi) \\ &\leq C e^{(\lambda-p-q+d)\tau^{k+1}} e^{(q+a+b)\tau^k} \|\xi\|_k. \end{aligned}$$

En reportant dans (4.12) il apparaît des termes de la forme

$$e^{\left[\sup(0, s+a+b-p-\lambda) + (\lambda-p-q+d)\tau \right] \tau^k} e^{(q+a+b)\tau^k} \|\xi\|_k$$

qu'il faut majorer lorsque λ varie de $p+q-d$ à $s+b$. Comme $s \leq p+q$ on a $s+b+a-p \leq q+b+a$ qui est inférieur à $p+q-d$ si p est supérieur à $b+a+d$; on a donc $\sup(0, s+b+a-p-\lambda) = 0$ et le maximum de l'expression étudiée est atteint pour $\lambda = s+b$. Après multiplication par $e^{-(s-p+a+b)\tau^{k+1}}$ on a le majorant

$$C e^{\left[-(q+a)(\tau-1) + b+d\tau \right] \tau^k} \|\xi\|_k$$

et l'on retrouve encore la condition (4.10) pour β . On peut donc poser

$$(4.13) \quad \boxed{\beta = (q+a)(\tau-1) - (b+d\tau)}.$$

On peut appliquer le théorème des fonctions implicites pourvu que

$$\frac{\beta}{\tau-1} > \frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}$$

c'est-à-dire, d'après (4.5), (4.6) et (4.13) :

$$q+a - \frac{b+d\tau}{\tau-1} > \frac{(c-b)\tau+2(a+b+d)}{2-\tau}$$

on ordonne cette expression :

$$(4.14) \quad q > d + (a+c+d) \frac{\tau}{2-\tau} + (b+d) \frac{\tau}{\tau-1}$$

Lorsque τ varie dans l'intervalle $[1, 2]$ le minimum du second membre valant

$$d + \left[\sqrt{a+c+d} + \sqrt{2(b+d)} \right]^2$$

et que le nombre q étant fixé comme dans l'énoncé, il est possible de choisir pour que (4;14) soit vérifié. $\square$

L'hypothèse (H.2.1) du théorème 3.4 entraîne que pour $k \geq b$ l'application $df(x)$ admet une extension continue $d^k f(x)$ de E^k dans F^{k-b} ; en posant $\delta^k f(x) = j^{k-c, k-b} \circ d^k f(x)$ on a montré (prop. 3.2) que l'hypothèse (H.2.2) entraîne que l'application $\delta^k f$ de Ω dans $L(E^k, F^{k-c})$ s'étend en une application continue de Ω^{k+a} dans $L(E^k, F^{k-c})$. Nous formulons l'hypothèse supplémentaire suivante :

H'.2. L'application $\widetilde{d^k f}$ de $\Omega \times E^k$ dans F^{k-b} admet une extension continue,
encore notée $\widetilde{d^k f}$, de $\Omega^{k+a} \times E^k$ dans F^{k-b} et l'on a :

$$(H'.2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega^{k+a} \quad \forall \xi \in E^k \\ \rho_{k-b}[\widetilde{d^k f}(x) \cdot \xi] \leq A_{k-b} \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(x)\} \rho_{\beta}(\xi) . \end{array} \right.$$

La majoration (H'.2.1) provient de (H.2.1) par passage à la limite.

L'hypothèse (H.3) entraîne que pour $k \geq d$, l'application $v(x)$ admet une extension continue $v^k(x)$ de F^k dans E^{k-d} . Nous formulons l'hypothèse supplémentaire suivante :

H'.3. L'application $\widetilde{v^k}$ de $\Omega \times F^k$ dans E^{k-d} admet une extension continue,
encore notée $\widetilde{v^k}$, de $\Omega^{k+a+b} \times F^k$ dans E^{k-d} et l'on a :

$$(H'.3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega^{k+a+b} \\ d^{k-d} f(i^{k+a-d, k+a+b} x) \circ v^k(x) = j^{k-b-d, k} \end{array} \right.$$

$$(H'.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega^{k+a+b} \quad \forall \phi \in F^k \\ \rho_{k-d}[\widetilde{v^k}(x) \cdot \phi] \leq A_{k-d} \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{a+b+\alpha}(x)\} \rho_{\beta}(\phi) . \end{array} \right.$$

Les relations (H'.3.1) et (H'.3.2) proviennent respectivement, par passage à la limite; des relations $df(x) \circ v(x) = 1_{F^\infty}$ et (H.3).

On reprend la démonstration du théorème 3.4 en y apportant les modifications suivantes : l'espace E_k est remplacé par l'espace normé $\hat{E}_k$ ayant pour espace vectoriel sous-jacent celui de $E^{p+q+a+c}$ et pour norme

$$||x||_k = \sum_{r=p}^{p+q+a+c} e^{-(r-p)\tau^k} \rho_r(x),$$

c'est-à-dire le complété de E_k ; on remplace de même F_k par l'espace normé $\hat{F}_k$ ayant pour espace vectoriel sous-jacent celui de F^{p+q} et pour norme

$$||y||_k = \sum_{s=p-a-b}^{p+q} e^{-(s-p+a+b)\tau^k} \rho_s(y) ;$$

les espaces E_∞ et F_∞ ne sont pas modifiés. Le corollaire 3.3 entraîne encore que f définit un morphisme $\hat{f}_.$ de classe C^1 entre les séquences $\hat{E}_.$ et $\hat{F}_.$ et l'hypothèse H'.3 nous permet d'étendre la définition de v_{k+1} aux nouvelles séquences en posant

$$v_{k+1}(x) = L_{e^{-\tau^{k+1}}} \circ v^{p+q}(i^{p+q+a+b, p+q+a+c} x) .$$

Il reste à vérifier que les majorations faites pour déterminer les constantes α , β et γ restent valables ici. La détermination de α repose sur la condition de Lipschitz démontrée à la proposition 3.2 et demeure inchangée. La détermination de γ repose sur la majoration (H.3) ; celle-ci ayant été étendue en (H'.3.2), on retrouve la même expression pour γ . Enfin la détermination de β repose sur les propriétés suivantes :

1) $v(x)$ est un inverse à droite de $df(x)$; cette propriété est employée pour déterminer $\rho_s(\xi - df(x)v_{k+1}(x)\xi)$ pour $s \leq p+q-b-d$, en remplaçant ξ par $df(x) \circ v(x) \cdot \xi$. Ici nous devons évaluer

$$\rho_s(\xi - e^{p+q+c} f(x) \circ L_{e^{-\tau^{k+1}}} \circ v^{p+q}(i^{p+q+a+b, p+q+a+c} x) \cdot \xi)$$

pour ξ élément de F^{p+q} et x élément de $\Omega^{p+q+a+c}$; comme on suppose $s \leq p+q-b-d$, on peut remplacer l'élément étudié de F^{p+q} par son image dans $F^{p+q-b-d}$ et écrire

$$j^{p+q-b-d, p+q}(\xi - \delta^{p+q+c} f(x) \circ L_{e^{-\tau} k+1} \circ v^{p+q}(i^{p+q+a+b, p+q+a+c} x) . \xi) = \\ d^{p+q-d} f(i^{p+q+a-d, p+q+a+c} x) \circ (I - L_{e^{-\tau} k+1}) \circ v^{p+q}(i^{p+q+a+b, p+q+a+c} x) . \xi$$

d'après (H'.3.1). La suite de cette majoration repose sur

- 2) la majoration (H.2.1) de $df(x)$ qui est étendue par la majoration (H'.2.1) de $d^{p+q-d} f(x)$;
- 3) les propriétés de l'opérateur d'approximation L_t ;
- 4) la majoration (H.3) de $v(x)$ qui est étendue par la majoration (H'.3.2) de $v^{p+q}(x)$.

Enfin, la majoration de $\rho_s(\xi - df(x) \circ v_{k+1}(x) . \xi)$ pour $s > p+q-b-d$ repose sur les propriétés 2), 3) et 4) précitées et s'étend donc au cas présent.

En résumé, le théorème 3.4 peut être établi en travaillant sur les séquences complétées $\hat{E}_.$ et $\hat{F}_.$, les constantes α , β et γ restant inchangées.

Théorème 3.6.- Soit f une application vérifiant les hypothèses H.1 H.2 et H'.2, H.3 et H'.3, telle que $f(0) = 0$. Quels que soient les entiers $p \geq \sup(k_0, a+b+d)$ et $q > E(d + (\sqrt{a+c+d} + \sqrt{2(b+d)})^2)$, il existe un nombre $\delta > 0$ ne dépendant que des constantes a , b , c , d , A_k , de p et de q et une application continue ϕ de la boule $B^{p+q}(\delta)$ de rayon δ de F^{p+q} , à valeurs dans E^p , telle que $f^p \circ \phi = j^{p, p+q} B^{p+q}(\delta)$.

On veut appliquer le corollaire 1.4 au morphisme $\hat{f}_.$ entre les séquences $\hat{E}_.$ et $\hat{F}_.$. Pour cela on doit montrer que l'application v_{k+1} de

$\hat{B}_k \times \hat{F}_k$ dans $\hat{E}_{k+1}$ est continue. Les normes de $\hat{E}_k$ et de $\hat{E}_{k+1}$ étant équivalentes à la norme de $E^{p+q+a+c}$, la norme de $\hat{F}_k$ étant équivalente à celle de F^{p+q} , on peut considérer $\hat{B}_k \times \hat{F}_k$ comme un sous-espace de $\Omega^{p+q+a+c} \times F^{p+q}$ et $\hat{E}_{k+1}$ comme un sous-espace de $E^{p+q+a+c}$; l'application $\widetilde{v}_{k+1}$ est alors induite par l'application composée

$$\Omega^{p+q+a+c} \times F^{p+q} \hookrightarrow \Omega^{p+q+a+b} \times F^{p+q} \xrightarrow{\widetilde{v}^{p+q}} E^{p+q-d} \xrightarrow[e^{-\tau^{k+1}}]{L} E^{p+q+a+c}$$

qui est continue d'après H'.3 $\square$

Remarque 3.7. - Les hypothèses H'.2 et H'.3 étant vérifiées, la démonstration du théorème 3.4, et celle du théorème 3.6, à l'aide des séquences $\hat{E}_k$ et $\hat{F}_k$ ne fait ni intervenir les espaces E^k pour $k > p+q+a+c$, ni les espaces F^k pour $k > p+q$; il en résulte que l'on peut énoncer ces théorèmes pour une application entre des chaînes finies d'espaces de Banach.

On peut mettre en évidence des propriétés de différentiabilité de la section ϕ par application du théorème 1.6; il faut pour cela une hypothèse sur la différentiabilité des application $\widetilde{v}^k$:

H".3. Il existe un entier $e \geq d$ tel que l'application $\widetilde{v}^k$ de $\Omega \times F^k$ dans E^{k-e} admette une extension de classe C^1 de $\Omega^{k+a+b} \times F^k$ dans E^{k-e} et que l'on ait

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \Omega^{k+a+b} \quad \forall \xi \in E^{k+a+b} \quad \forall \phi \in F^k \\ \rho_{k-e} [d\widetilde{v}^k(x) \cdot (\xi, \phi)] \leq A_{k-e} \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq k} \sup\{1, \rho_{a+b+\alpha}(x)\} \rho_{a+b+\beta}(\xi) \rho_{\gamma}(\phi) \end{array} \right.$$

Théorème 3.8. - Soit f une application vérifiant les hypothèses H.1, H.2 et H'.2, H.3, H'.3 et H".3, telle que $f(0) = 0$. Il existe un entier q_1 ne dépendant que des constantes a, b, c, d, e et A_k tel que quel que

soit $p \geq \sup(k_0, a+b+e)$ et quel que soit $q \geq q_1$, il existe un nombre $\delta > 0$ et une application ϕ de classe C^1 de la boule $B^{p+q}(\delta)$ de rayon δ de F^{p+q} à valeurs dans E^p , telle que $f^p \circ \phi = j^{p,p+q}|_{B^{p+q}(\delta)}$.

On va montrer que si q est choisi assez grand ($q \geq q_1$), on peut choisir τ pour que le morphisme f entre les séquences $\hat{E}$ et $\hat{F}$ vérifie les hypothèses du théorème 1.6. Les constantes α , β et γ sont celles déterminées à la démonstration du théorème 3.4 :

$$\alpha = c-b$$

$$\beta = (q+a)(\tau-1) - (b+d\tau)$$

$$\gamma = a+b+d$$

Détermination de μ . Par (H'.2.1) on a

$$\begin{aligned} \rho_s(d^{p+q+a}f(x).\xi) &\leq A_s \sum_{\alpha+\beta \leq s+b} e^{[\sup(0, a+\alpha-p) + \sup(0, \beta-p)]\tau^k} ||\xi||_k \\ &\leq C e^{\sup(0, s+b+a-p)\tau^k} ||\xi||_k \end{aligned}$$

donc, pour $s \geq p-a-b$, on a

$$e^{-(s-p+a+b)\tau^k} \rho_s(d^{p+q+a}f(x).\xi) \leq C ||\xi||_k$$

d'où

$$||df_k(x).\xi||_k \leq C ||\xi||_k$$

et on peut poser

$$\boxed{\mu = 0}$$

On doit montrer que l'application $\widetilde{v}_{k+1}$ de $\hat{B}_k \times \hat{F}_k$ dans $\hat{E}_{k+1}$ est de classe C^1 ; les normes de $\hat{E}_k$ et de $\hat{E}_{k+1}$ étant équivalentes à celle de $E^{p+q+a+c}$, la norme de $\hat{F}_k$ étant équivalente à celle de F^{p+q} , l'application

$\widetilde{v}_{k+1}$ apparaît comme induite par l'application composée

$$\Omega^{p+q+a+c} \times \mathbb{F}^{p+q} \hookrightarrow \Omega^{p+q+a+b} \times \mathbb{F}^{p+q} \xrightarrow{\widetilde{v}^{p+q}} E^{p+q-e} \xrightarrow{e^{-\tau^{k+1}}} E^{p+q+a+c}$$

qui est de classe C^1 d'après H".3.

Détermination de v . On a

$$dv_{k+1}(x) = L_{e^{-\tau^{k+1}}} \circ dv^{p+q}(i^{p+q+a+b, p+q+a+c} x) .$$

Pour $r \geq p$, il vient

$$\rho_r(dv_{k+1}(x) \cdot (\xi, \phi)) \leq C \cdot e^{(r-p)\tau^{k+1}} \cdot \rho_p(dv^{p+q}(i^{p+q+a+b, p+q+a+c} x) \cdot (\xi, \phi))$$

et par (H".3)

$$\rho_r(dv_{k+1}(x) \cdot (\xi, \phi)) \leq C \cdot e^{(r-p)\tau^{k+1}} \cdot e^{v\tau^k} \cdot \|\xi\|_k \cdot \|\phi\|_k$$

avec

$$v = \sup_{\alpha+\beta+\gamma \leq p+e} [\sup(0, \alpha+b+\alpha-p) + \sup(0, \alpha+b+\beta-p) + \sup(0, \gamma-p+\alpha+b)] = \alpha+b+e ;$$

on a donc

$$e^{-(r-p)\tau^{k+1}} \rho_r(dv_{k+1}(x) \cdot (\xi, \phi)) \leq C e^{(a+b+e)\tau^k} \|\xi\|_k \|\phi\|_k$$

d'où

$$\|dv_{k+1}(x) \cdot (\xi, \phi)\|_{k+1} \leq C e^{(a+b+e)\tau^k} \|\xi\|_k \|\phi\|_k$$

et l'on peut poser

$$\boxed{v = a+b+e}$$

On peut appliquer le théorème 1.2.1. pourvu que

$$\frac{\beta}{\tau-1} > \sup\left\{\frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau}, \mu\tau+v+\gamma\tau\right\}$$

c'est-à-dire, en remplaçant α , β , γ , μ et ν par leurs expressions, et en ordonnant :

$$q > \sup\{d+(a+c+d)\frac{\tau}{2-\tau} + (b+d)\frac{\tau}{\tau-1}, e+(a+b+d)\tau + (b+d)\frac{\tau}{\tau-1}\} ;$$

l'entier q_1 de l'énoncé est le plus petit entier strictement supérieur au minimum du second membre lorsque τ varie dans l'intervalle $[1,2]$ $\square$

Proposition 3.9.- Soit f une application vérifiant les hypothèses H.1, H.2 et H'.2, H.3, H'.3 et H''.3, telle que $f(0) = 0$ et telle enfin que $v(x)$ soit un inverse de $df(x)$ (pour $x \in \Omega$). Soit $q \geq E(d+(\sqrt{a+c+c} + \sqrt{2(b+d)})^2)$ quel que soit l'entier p , si la section ϕ de $B^{p+q}(\delta)$ dans E^p se relève en une application continue de but $E^{p+\lambda}$, alors ϕ considérée comme application de $B^{p+q}(\delta)$ dans $E^{p+\lambda-a-b-d}$ est de classe C^1 .

On veut identifier la différentielle de ϕ par application de la proposition 1.7 ; pour cela il faut montrer que $v_{k+1}(x)$ est un quasi-inverse à gauche de $df_k(x)$. On a

$$\xi - v_{k+1}(x) \circ df_k(x) \cdot \xi = \xi - L_{e^{-\tau^{k+1}}} \cdot \xi$$

d'où, pour $r \geq p$

$$\begin{aligned} \rho_r(\xi - v_{k+1}(x) \circ df_k(x) \cdot \xi) &\leq C e^{(r-p-q-a-c)\tau^{k+1}} \rho_{p+q+a+c}(\xi) \\ &\leq C e^{(r-p)\tau^{k+1}} e^{-(q+a+c)(\tau-1)\tau^k} \|\xi\|_k \end{aligned}$$

et

$$e^{-(r-p)\tau^k} \rho_r(\xi - v_{k+1}(x) \circ df_k(x) \cdot \xi) \leq C e^{-(q+a+c)(\tau-1)\tau^k} \|\xi\|_k .$$

On a donc

$$\|\xi - v_{k+1}(x) \circ df_k(x) \cdot \xi\|_{k+1} \leq K e^{-(q+a+c)(\tau-1)\tau^k} \|\xi\|_k ,$$

ce qui établit que $v_{k+1}(x)$ est un quasi-inverse à gauche de $df_k(x)$.

La différentielle de ϕ (considérée comme application de $B^{p+q}(\delta)$ dans E^{p+q-q_1} , est donc de classe C^1) se relève en une application continue de $B^{p+q}(\delta)$ dans $L(F^{p+q}, E^{p+\lambda-a-b-d})$ définie pour x élément de $B^{p+q}(\delta)$ par

$$v^{p+\lambda-a-b}(\phi(x)) \circ j^{p+\lambda-a-b, p+q}.$$

Que l'application ϕ de $B^{p+q}(\delta)$ dans $E^{p+\lambda-a-b-d}$ soit alors de classe C^1 résulte du lemme suivant :

Lemme 3.10.- Soient E, F et F' des espaces de Banach, Ω un ouvert de E , f une application de Ω dans F , j une application linéaire injective de F dans F' . On suppose que $j \circ f$ est de classe C^1 et que l'application $d(j \circ f)$ de Ω dans $L(E, F')$ se factorise en une application continue δf de Ω dans $L(E, F)$. Alors l'application f de Ω dans F est de classe C^1 .

On a

$$j \circ f(x+y) - j \circ f(x) = \int_0^1 d(j \circ f)(x+ty) \cdot y \, dt$$

d'où

$$j \circ f(x+y) - j \circ f(x) = j \left(\int_0^1 \delta f(x+ty) \cdot y \, dt \right) ;$$

l'application j étant injective on a

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 \delta f(x+ty) \cdot y \, dt$$

ce qui démontre la différentiabilité de f $\square$

§ 4 - REGULARITE DES SOLUTIONS.

Soit f une application vérifiant les hypothèses du théorème 3.6 et soit ϕ la section continue, définie sur $B^{p+q}(\delta)$, à valeurs dans E^p , construite dans la démonstration de ce théorème. Le problème de la régularité des solutions du problème de fonctions implicites attaché à f pourrait sembler être résolu par la détermination du plus petit entier q pour lequel on puisse construire une application ϕ . La situation n'est pas aussi simple que cela : l'entier q étant fixé, éventuellement à sa valeur minimum, il existe des entiers $\lambda > 0$ tels que ϕ , ou du moins sa restriction à une boule $B^{p+q}(\delta')$ avec $\delta' < \delta$, se factorise par $E^{p+\lambda}$. La question se pose donc d'évaluer pour q donné la valeur maximum $\lambda(q)$ que l'on peut donner à λ puis de choisir q pour que le "défaut de différentiabilité" $\delta(q) = q - \lambda(q)$ de la solution ϕ soit minimum. Nous donnons une réponse partielle à cette question : à défaut de déterminer la fonction $q \mapsto \lambda(q)$ nous construisons deux fonctions minorantes qui permettent d'assurer certaines factorisations de ϕ .

Proposition 4.1.- Soit f une application vérifiant les hypothèses du théorème 3.6. Etant donné un entier $q > d + [\sqrt{a+c+d} + \sqrt{2(b+d)}]^2$ la relation

$$q > d + (a+c+d) \frac{\tau}{2-\tau} + (b+d) \frac{\tau}{\tau-1}$$

est vérifiée pour $1 \leq \tau_1(q) < \tau < \tau_2(q) \leq 2$; on pose $\lambda_1(q)$ le plus grand entier vérifiant

$$\lambda_1(q) < \max_{\tau_1(q) < \tau < \tau_2(q)} \left(\frac{q-d}{\tau} - \frac{b+d}{\tau-1} \right).$$

On peut choisir τ dans la démonstration du théorème 3.6 pour que la restriction à une boule $B^{p+q}(\delta')$ de la section ϕ de f que l'on construit de $B^{p+q}(\delta)$ dans E^p se factorise par $E^{p+\lambda_1(q)}$.

Si l'on fixe q tel que

$$(4.1.1) \quad q > d + (a+c+d) \frac{\tau}{2-\tau} + (b+d) \frac{\tau}{\tau-1}$$

et s tel que

$$\frac{\alpha\tau+2\gamma}{2-\tau} < s < \frac{\beta}{\tau-1} = q+a - \frac{b+d}{\tau-1}$$

la démonstration du théorème de fonctions implicites pour les séquences d'espaces normés montre que pour $\rho_{p+q}(y) < \delta$ (où δ dépend de s et de q), il existe une section ϕ limite d'une suite $\{\phi_n\}_{n \geq N}$ d'applications de $B^{p+q}(\delta)$ dans $E^{p+q+a+c}$, vérifiant

$$\|\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)\|_{n+1} < K e^{(\gamma-s)\tau^n}.$$

Il en résulte que pour tout $\lambda \leq q+a+c$ on a

$$\rho_{p+\lambda}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) < K e^{(\lambda\tau+\gamma-s)\tau^n}$$

et la suite $\{\phi_n\}_{n \geq N}$ converge uniformément dans $E^{p+\lambda}$ pourvu que l'exposant soit négatif, c'est-à-dire

$$\lambda\tau+a+b+d < s < q+a - \frac{b+d\tau}{\tau-1}.$$

Pour pouvoir réaliser cette situation, il suffit d'avoir

$$\lambda\tau+a+b+d < q+a - \frac{b+d\tau}{\tau-1}$$

et de choisir s entre ces deux réels, ce qui se traduit, τ étant fixé, par une modification du domaine de définition de la section. En ordonnant cette relation il vient

$$(4.1.2) \quad \lambda < \frac{q-d}{\tau} - \frac{b+d}{\tau-1}.$$

Pour q fixé, la relation (4.1.1) est vérifiée pour τ compris entre deux valeurs $\tau_1(q)$ et $\tau_2(q)$; on peut donc prendre pour λ le plus grand entier

$\lambda_1(q)$ vérifiant

$$\lambda_1(q) < \max_{\tau_1(q) < \tau < \tau_2(q)} \left(\frac{q-d}{\tau} - \frac{b+d}{\tau-1} \right)$$

puis fixer τ pour que (4.1.2) soit vérifiée. La détermination explicite de $\lambda_1(q)$ et de $\delta_1(q) = q - \lambda_1(q)$ doit être faite dans chaque cas ; nous donnons plus loin (4.5) ce calcul dans le cas particulier $a=1$, $b=0$, $c=1$ correspondant aux applications dérivables $\square$

Remarque 4.2. - Sans calculer explicitement $\lambda_1(q)$, les relations (4.1.1) et (4.1.2) permettent de borner inférieurement $\delta_1(q)$, c'est-à-dire d'évaluer l'amélioration maximum que cette méthode apporte à la régularité de ϕ . En effet, la relation (4.1.2) pouvant s'écrire

$$q - \lambda\tau > d + (b+d) \frac{\tau}{\tau-1}$$

on a

$$\delta = q - \lambda = \frac{1}{\tau} [q(\tau-1) + (q - \lambda\tau)] > d + (a+c+d) \frac{\tau-1}{2-\tau} + (b+d) \frac{\tau}{\tau-1}.$$

En prenant le minimum du second membre, il vient

$$(4.2) \quad \delta_1(q) > 2b+3d + 2\sqrt{(a+c+d)(b+d)}.$$

Nous verrons que pour $a=1$, $b=0$, $c=1$, la valeur minimum imposée par cette relation est effectivement atteinte.

Sergeraert a montré [12] que la restriction de ϕ à $B^{p+q}(\delta) \cap F^\infty$ se factorise par E^∞ ; sa démonstration, adaptée aux hypothèses du théorème 3.6, entraîne aussi une factorisation de ϕ par un $E^{p+\lambda}$. On remarquera que si l'on ne s'intéresse qu'à ce résultat particulier, la démonstration reste valide pour des chaînes E^* et F^* finies.

Lemme 4.3.- (Sergeraert) - Soit f une application vérifiant les hypothèses du théorème 3.6. Pour $p \geq \sup\{k_0, a+b+d\}$ et $q > d + [\sqrt{a+c+d} + \sqrt{2(b+d)}]^2$ on a construit une section ϕ de f , définie sur une boule $B^{p+q}(\delta)$, à valeurs dans E^p , comme limite d'une suite $\{\phi_n\}_{n \geq N}$. Pour tout entier k il existe une fonction M_k de $B^{p+q}(\delta) \cap F^f$ dans $\mathbb{R}$, continue pour la topologie induite par F^k , telle que

$$\rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) \leq (1 + M_k(y))^{n+1} e^{(a+b+d)\tau} \frac{n+2-1}{\tau-1}.$$

Les applications ϕ_n sont liées par la relation de récurrence

$$\begin{cases} \phi_{n+1}(y) - \phi_n(y) = L_{e^{-\tau}n+1} \cdot v^{p+q}(\phi_n(y)) \cdot (j^{p+q}f(\phi_n(y)) - y) \\ \phi_N(y) = 0 \end{cases}$$

En posant $C_k = C(k-d, a+b+d)$, on a la majoration

$$\rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) \leq C_k e^{(a+b+d)\tau^{n+1}} \rho_{k-d}[v^k(\phi_n(y)) \cdot (j^k f(\phi_n(y)) - y)]$$

et par application de (H'.3.2)

$$\rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) \leq C_k e^{(a+b+d)\tau^{n+1}} A_{k-d} \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{a+b+\alpha}(\phi_n(y))\} \rho_{\beta}(j^k f(\phi_n(y)) - y).$$

Pour majorer $\rho_{\beta}(f(\phi_n(y)))$ on remarque que, l'application f étant nulle à l'origine, on a

$$f(x) = \int_0^1 df(tx) \cdot x \, dt$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho_h(f(x)) &\leq A_k \sum_{\alpha+\beta \leq h+b} \sup_{z \in [0, x]} \{1, \rho_{a+\alpha}(z)\} \rho_{\beta}(x) \\ &\leq A_h \sum_{\alpha+\beta \leq h+b} \sup\{1, \rho_{a+\alpha}(x)\} \rho_{\beta}(x); \end{aligned}$$

comme on a

$$\rho_{a+\alpha}(x) \rho_{\beta}(x) \leq \gamma_{0, a+\alpha, a+\alpha+\beta} \gamma_{0, \beta, a+\alpha+\beta} \rho_0(x) \rho_{\alpha+\beta+\beta}(x),$$

si $\rho_0(x)$ est borné, il existe une constante B_h telle que

$$\rho_h(f(x)) \leq B_h \rho_{a+b+h}(x) .$$

En reportant ce résultat dans la majoration de $\rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))$ il apparaît des termes de la forme

$$\sup\{1, \rho_{a+b+\alpha}(\phi_n(y))\} \rho_\beta(y)$$

qui sont majorés par

$$\sup\{1, \rho_{k+a+b}(\phi_n(y))\} \rho_k(y)$$

et des termes de la forme

$$\sup\{1, \rho_{a+b+\alpha}(\phi_n(y))\} \rho_{a+b+\beta}(\phi_n(y))$$

qui admettant un majorant de la forme

$$D_k \rho_{k+a+b}(\phi_n(y))$$

puisque $\rho_{a+b+\alpha}(x) \rho_{a+b+\beta}(x)$ est majoré par

$$\gamma_{a+b, a+b+\alpha, a+b+\alpha+\beta} \gamma_{a+b, a+b+\beta, a+b+\alpha+\beta} \rho_{a+b}(x) \rho_{a+b+\alpha+\beta}(x)$$

et que $\rho_{a+b}(\phi_n(y))$ reste borné. Il existe donc une fonction $M_k(y)$, ne dépendant que de $\rho_k(y)$ telle que l'on ait

$$(4.3.1) \quad \rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) \leq M_k(y) e^{(a+b+d)\tau^{n+1}} \sup\{1, \rho_{k+a+b}(\phi_n(y))\}$$

d'où

$$(4.3.2) \quad \sup\{1, \rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y))\} \leq \sup\{1, \rho_{k+a+b}(\phi_n(y))\} + \rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))$$

$$\leq (1 + M_k(y)) e^{(a+b+d)\tau^{n+1}} \sup\{1, \rho_{k+a+b}(\phi_n(y))\}$$

Par récurrence sur n , la relation (4.3.2) donne

$$\sup\{1, \rho_{k+a+b}(\phi_n(y))\} \leq (1+M_k(y))^n e^{(a+b+d)\frac{\tau^{n+1}-1}{\tau-1}}$$

d'où en reportant dans (4.3.1)

$$(4.3.3) \quad \rho_{k+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) \leq (1+M_k(y))^{n+1} e^{(a+b+d)\frac{\tau^{n+2}-1}{\tau-1}} \quad \square$$

Proposition 4.5.- Soit f une application vérifiant les hypothèses du théorème 3.6. Etant donné un entier $q > d + [\sqrt{a+c+d} + \sqrt{2(b+d)}]^2$ la relation

$$q > d + (a+c+d) \frac{\tau}{2-\tau} + (b+d) \frac{\tau}{\tau-1}$$

est vérifiée pour $1 \leq \tau_1(q) < \tau < \tau_2(q) \leq 2$; on pose $\lambda_2(q)$ le plus grand entier vérifiant

$$\lambda_2(q) < (q+a+b) \left[1 - \frac{(a+b+d)\tau_2(q)^2}{q(\tau_2(q)-1) + a\tau_2(q)^2 + b\tau_2(q)(\tau_2(q)-1) + d(\tau_2(q)-1)^2} \right].$$

On peut choisir τ dans la démonstration du théorème 3.6 pour que la restriction à une boule $B^{p+q}(\delta')$ de la section ϕ de f que l'on construit de $B^{p+q}(\delta)$ dans E^p se factorise par $E^{p+\lambda_2(q)}$.

Les paramètres τ et s étant fixés, on construit ϕ comme limite d'une suite $\{\phi_n\}_{n \geq N}$. L'inégalité de convexité donne

$$\rho_{p+\lambda}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y)) \leq \gamma \rho_p(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))^{\frac{a+b+q-\lambda}{a+b+q}} \rho_{p+q+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))^{\frac{\lambda}{a+b+q}}$$

où l'on majore $\rho_{p+q+a+b}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))$ d'après (4.3.3) et $\rho_p(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))$ par $e^{(a+b+d-s)\tau^n}$; il vient le majorant suivant pour $\rho_{p+\lambda}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))$:

$$\gamma(1+M_{p+q}(y)) \frac{(n+1)\lambda}{a+b+q} e^{\left[\lambda \frac{a+b+d}{a+b+q} \frac{\tau^{n+2}-1}{\tau^n(\tau-1)} + \frac{a+b+q-\lambda}{a+b+q} (a+b+d-s) \right] \tau^n}$$

où la fonction M_{p+q} est localement bornée puisque continue. Si

$$\lambda \frac{a+b+d}{a+b+q} \frac{\tau^2}{\tau-1} + \frac{a+b+q-\lambda}{a+b+q} (a+b+d-s) ,$$

limite quant n tend vers l'infini du coefficient de τ^n dans l'exponentielle est strictement négatif, on aura pour n assez grand et pour y assez voisin de zéro un majorant uniforme de $\rho_{p+\lambda}(\phi_{n+1}(y) - \phi_n(y))$ de la forme $M^{n+1} e^{-\epsilon \tau^n}$, terme général d'une série convergente ; dans ce cas la suite $\{\phi_n\}_{n \geq N}$ convergera normalement dans $E^{p+\lambda}$.

En ordonnant en λ la condition s'écrit sous la forme

$$(4.4.1) \quad \lambda \left[1 + \frac{a+b+d}{s-(a+b+d)} \frac{\tau^2}{\tau-1} \right] < q+a+b .$$

Pour q et τ fixés on peut choisir s aussi voisin que l'on veut de sa borne supérieure $q+a-\frac{b+d\tau}{\tau-1}$; il suffit donc d'avoir

$$\lambda \left[1 + \frac{(a+b+d)\tau^2}{q(\tau-1)-b\tau-d(2\tau-1)} \right] < q+a+b$$

soit encore

$$(4.4.2) \quad \lambda < (q+a+b) \left[1 - \frac{(a+b+d)\tau^2}{q(\tau-1)+a\tau^2+b\tau(\tau-1)+d(\tau-1)^2} \right] .$$

Le second membre est, dans l'intervalle $[1,2]$, une fonction croissante de τ (sa dérivée a le signe de $2(q-d)\tau-(q-b-2d)\tau^2$) : pour q fixé, on peut choisir τ arbitrairement voisin de sa borne supérieure $\tau_2(q)$ et l'on peut donc prendre pour λ le plus grand entier $\lambda_2(q)$ vérifiant la relation (4.4.2) où l'on donne à τ la valeur $\tau_2(q)$. Le défaut de différentiabilité $\delta_2(q) = q-\lambda_2(q)$ est alors le plus petit entier supérieur à la valeur de

$$(4.4.3) \quad \frac{(q+a+b)(a+b+d)\tau^2}{q(\tau-1)+a\tau^2+b\tau(\tau-1)+d(\tau-1)^2} - (a+b)$$

pour $\tau = \tau_2(q) \quad \square$

Applications 4.5.- Nous nous proposons d'expliciter les résultats des propositions 4.1 et 4.4 dans le cas particulier $a=1, b=0, c=1$, le paramètre d restant indéterminé.

La borne inférieure de $\delta_1(q)$ donnée à la remarque 4.2 est le plus petit entier δ vérifiant

$$\delta > 3d + 2\sqrt{d(2+d)} \quad .$$

Pour $d=0$ on trouve $\delta_{\min} = 1$ et l'inégalité

$$5d + 1 < 3d + 2\sqrt{d(2+d)} < 5d + 2$$

vraie pour $d > 1/4$ donne $\delta_{\min} = 5d+2$ pour $d \geq 1$. Ce minimum est effectivement atteint : les valeurs $q = 7d+5$, $\lambda = 2d+3$ et $\tau = \frac{3d+4}{2d+3}$ vérifient les relations (4.1.1) et (4.1.2) et l'on a

$$\delta_1(7d+5) = (7d+5) - (2d+3) = 5d+2 = \delta_{\min} \quad .$$

Sauf pour les petites valeurs de d , le minimum $5d+2$ est atteint pour des valeurs de q strictement supérieures à la valeur minimum de q . Un calcul numérique simple conduit aux résultats suivants pour les petites valeurs de d :

$d = 0$	$q \geq 3$	$\delta_1(3) = 1$	valeur minimum
$d = 1$	$q \geq 11$	$\delta_1(11) = 7$	valeur minimum
$d = 2$	$q \geq 19$	$\delta_1(19) = 12$	valeur minimum
$d = 2$	$q \geq 25$	$\delta_1(25) = 18$	
		$\delta_1(26) = 17$	valeur minimum.

L'étude du minimum de $\delta_2(q)$ est beaucoup plus difficile. On peut cependant remarquer que l'expression (4.4.3) est une fonction croissante de q (sa dérivée a le signe de $a(\tau^2 - \tau + 1) + (b+d)(\tau-1)^2$). On obtient donc un majorant

pour $\min_q \delta_2(q)$ en faisant tendre q vers l'infini ; il vient

$$\min_q \delta_2(q) \leq 4(a+b+d) - (a+b)$$

soit, pour $a=1$ et $b=0$

$$\min_q \delta_2(q) \leq 4d+3 .$$

La deuxième méthode donnera donc certainement un meilleur résultat que la première si $4d+3 < 5d+2$, soit $d > 1$. C'est en fait déjà le cas pour $d=1$ ainsi que le montre un calcul numérique aussi élémentaire qu'ennuyeux dont les résultats sont résumés dans le tableau suivant :

$d = 0$	$q \geq 3$	$\delta_2(3) = 2$	valeur minimum
$d = 1$	$q \geq 11$	$\delta_2(11) = \delta_2(12) = \delta_2(13) = 7$	
		$\delta_2(14) = 6$	valeur minimum
$d = 2$	$q \geq 19$	$\delta_2(19) = \delta_2(20) = 11$	
		$\delta_2(21) = 10$	valeur minimum
$d = 3$	$q \geq 25$	$\delta_2(25) = 16$	
		$\delta_2(26) = \delta_2(27) = \delta_2(28) = 15$	
		$\delta_2(29) = 14$	valeur minimum.

§ 5 - THEOREME DE NASH ET APPLICATIONS DERIVABLES.

Remarque 5.1.- Sur la régularité des solutions. On peut mesurer l'incidence des paramètres a , b et c introduits dans les hypothèses du théorème de Nash sur l'exemple suivant. Soit f une application de classe D^2 ; on peut

- ou bien ne pas reconnaître que f est de classe D^2 mais seulement que $j^{k-2,k} f^k$ est de classe C^2 et prendre $a = 0$, $b = 2$, $c = 2$,
- ou bien remarquer que $j^{k-1,k} f^k$ était déjà de classe C^1 mais ne pas tenir compte des factorisations des différentielles et prendre $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$,
- ou bien tenir compte de toutes les propriétés de f et prendre $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$.

Le tableau suivant donne pour ces trois possibilités les valeurs minima de q pour quelques valeurs du paramètre d :

	$a=0, b=2, c=2$	$a=0, b=1, c=2$	$a=1, b=0, c=1$
$d = 0$	12	7	3
$d = 1$	19	14	11
$d = 2$	26	22	19
$d = 3$	33	30	25

Cette comparaison fait ressortir

- d'une part le bien fondé de l'introduction de paramètres supplémentaires dans les hypothèses du théorème de Nash puisque ceux-ci permettent, en tenant compte des particularités de l'application f , un gain important de régularité pour la solution,

- d'autre part le fait que le défaut de régularité pour la solution

est minimum pour $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, c'est-à-dire essentiellement pour une application dérivable.

Pour établir vraiment ce point, il faut en fait comparer la situation $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ à toutes les situations a , b , c vérifiant $a + c = 2$ (i.e. les applications f vérifiant $j^{k-2,k} f^k$ de classe C^2).

La borne inférieure de q est donnée dans ce cas général par

$$d + [\sqrt{2+d} + \sqrt{2(b+d)}]^2 ;$$

pour d fixé, le minimum correspond à $b = 0$. Il y a donc trois situations donnant un défaut de régularité minimum :

- (i) $a = 0$ $b = 0$ $c = 2$,
- (ii) $a = 1$ $b = 0$ $c = 1$,
- (iii) $a = 2$ $b = 0$ $c = 0$;

ces cas correspondent essentiellement

- (i) à une application f telle que f^k est déjà de classe C^1 ,
- (ii) à une application dérivable,
- (iii) à une application f telle que $d[j^{k-2,k} f^k](x)$ et $d^2[j^{k-2,k} f^k](x)$ se factorisent tous deux par E^k .

Le premier cas est une exception et le dernier ressortit, par réindexation, au cas des applications f vérifiant $j^{k-1,k} f^k$ de classe C^2 .

Si l'on souhaite de plus trouver une section continue de f avec un défaut de régularité minimum, il faut montrer que la différentielle première de f vérifie une propriété de continuité (hypothèse $H'.2$) sans pour cela augmenter les paramètres. Or il se trouve qu'en général la factorisation

$$\delta f : \Omega^k \rightarrow L(E^{k-1}, F^{k-1})$$

de la différentielle de f n'est pas continue pour la topologie de la norme mais que

$$(j^{k-2,k-1})_* \circ \delta f : \Omega^k \rightarrow L(E^{k-1}, F^{k-2})$$

l'est, ce qui conduit en première analyse à prendre $b = 1$ au lieu de $b = 0$. En fait, l'hypothèse $H'.2$ exige seulement que

$$\widetilde{\delta f} : \Omega^k \times E^{k-1} \rightarrow F^{k-1}$$

soit continue, ce qui est une conséquence des propriétés de S -continuité de δf lorsque f est dérivable (lemme I.3.8). Réciproquement, la remarque 1.6.3 montre que la continuité de $\widetilde{\delta f}$ implique, sous des hypothèses assez générales, la S -continuité de δf ; c'est par exemple le cas si la source de f est une chaîne de Rellich. Cela signifie qu'alors, pour qu'on trouve par application du théorème de Nash une section continue de f présentant un défaut de différentiabilité minimum, il faut que f soit de classe D^1 .

En conclusion, on peut dire que parmi les applications f vérifiant $j^{k-2,k} f^k$ de classe C^2 c'est essentiellement pour les applications de classe D^2 que le théorème de Nash donne son résultat optimum.

Remarque 5.2.- Sur la vérification des hypothèses. Un procédé classique en géométrie différentielle pour montrer qu'une application est différentiable, pour calculer ses différentielles, pour établir des majorations, est de décomposer cette application en applications plus simples, les opérations intervenant dans cette décomposition se ramenant à deux types : le produit fini et la composition des applications. Si on essayait d'appliquer les mêmes méthodes aux applications entre chaînes d'espaces de Banach on constate

que les hypothèses du théorème de Nash restent stables par produit mais pas par composition. Cela est facile à comprendre : a priori, si f et g sont des applications telles que $i^{k-2,k} \circ f^k$ et $j^{k-2,k} \circ g^k$ soient de classe C^2 , on ne peut pas affirmer que $j^{k-2,k} \circ g^k \circ f^k$ soit de classe C^2 mais seulement que $j^{k-4,k} \circ g^k \circ f^k$ l'est ; cela signifie que si f et g vérifient les hypothèses (H.1) et (H.2) avec des paramètres tels que $a + c = 2$, on pourra au mieux en déduire que $g \circ f$ vérifie (H.1) et (H.2) avec $a + c = 4$. La variation rapide de q en fonction de $a + c$ fait qu'il n'est pas indifférent d'obtenir 4 plutôt que 2. On est donc placé devant le dilemme suivant :

- ou bien étudier chaque application à laquelle on veut appliquer le théorème de Nash, directement, sans réduction à des applications simples ; on peut alors déterminer les paramètres optima, mais très vite les calculs deviennent inextricables.

- ou bien user de tous les procédés classiques de décomposition des applications ; le calcul est simplifié et on peut faire appel à des résultats antérieurement démontrés, mais les paramètres sont, en gros, multipliés par le nombre de compositions effectuées d'où un accroissement rapide de q .

La théorie des applications dérivables permet d'échapper à ce choix ; cela est dû essentiellement au fait que le composé de deux applications de classe D^2 est encore une application de classe D^2 . Nous allons décrire une sous-catégorie, stable pour toutes les opérations élémentaires, de la catégorie des applications de classe D^2 , sous-catégorie dont les éléments vérifient les hypothèses (H.1) et (H.2) ; toute application se ramenant à des applications élément de cette sous-catégorie en fera donc partie et vérifiera automatiquement (H.1) et (H.2).

Définition 5.2.1. - Soient E^* et F^* deux chaînes d'espaces de

Banach, U un ouvert de E^∞ et f une application de U dans F^∞ . Nous dirons que f est linéairement majorée si pour tout entier $k \geq 1$ il existe A_k tel que

$$\forall x \in U \quad \rho_k(f(x)) \leq A_k \sup\{1, \rho_k(x)\}.$$

5.2.2.- Soient E^* , F^* et G^* trois chaînes d'espaces de Banach, U un ouvert de E^∞ et u une application de U dans $L(F^\infty; G^\infty)$. Nous dirons que u est linéairement majorée si pour tout entier k il existe A_k tel que

$$\forall x \in U \quad \forall \xi \in F^\infty \quad \rho_k(u(x) \cdot \xi) \leq A_k \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{1+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\xi).$$

5.2.3.- Soient E^* , F_1^* , F_2^* , G^* quatre chaînes d'espaces de Banach, U un ouvert de E^∞ et v une application de U dans $L(F_1^\infty, F_2^\infty; G^\infty)$. Nous dirons que v est linéairement majorée si pour tout entier k il existe A_k tel que

$$\forall x \in U \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \in F_1^\infty F_2^\infty \quad \rho_k(v(x) \circ (\xi_1, \xi_2)) \leq A_k \sum_{\alpha+\beta+\gamma \leq k+1} \sup\{1, \rho_{1+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\xi_1) \rho_\gamma(\xi_2)$$

Proposition 5.2.4.- Si les chaînes considérées admettent des données d'approximations et si les domaines de définition sont bornés pour la norme ρ_1 on a les propositions suivantes :

(i) Si les applications f et g suivantes

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{f} F^\infty \supset V \xrightarrow{g} G^\infty$$

sont linéairement majorées, l'application $g \circ f$ est linéairement majorée.

(ii) Si les applications f et u suivantes

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{f} F^\infty \supset V \xrightarrow{u} L(G^\infty; H^\infty)$$

sont linéairement majorées, l'application $u \circ f$ est linéairement majorée.

(iii) Si les applications u et v suivantes

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{u} L(F^\infty; G^\infty) \quad E^\infty \supset U \xrightarrow{v} L(G^\infty; H^\infty)$$

sont linéairement majorées, l'application

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{v \circ u} L(F^\infty; H^\infty)$$

est linéairement majorée.

(iv) Si les applications f et v suivantes

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{f} F^\infty \supset V \xrightarrow{v} L(G_1^\infty, G_2^\infty; H^\infty)$$

sont linéairement majorées, l'application $v \circ f$ est linéairement majorée.

(v) Si les applications u_1, u_2, v suivantes

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{u_i} L(F_i^\infty; G_i^\infty) \quad E^\infty \supset U \xrightarrow{v} L(G_1^\infty, G_2^\infty; H^\infty)$$

sont linéairement majorées, l'application

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{v \circ (u_1, u_2)} L(F_1^\infty, F_2^\infty; H^\infty)$$

est linéairement majorée.

(vi) Si les applications u et v suivantes

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{u} L(G^\infty; H^\infty) \quad E^\infty \supset U \xrightarrow{v} L(F_1^\infty, F_2^\infty; G^\infty)$$

sont linéairement majorées, l'application

$$E^\infty \supset U \xrightarrow{u \circ v} L(F_1^\infty, F_2^\infty; H^\infty)$$

est linéairement majorée.

Donnons les deux démonstrations type :

(i) on a

$$\begin{aligned} \rho_k(g \circ f(x)) &\leq B_k \sup\{1, \rho_k(f(x))\} \leq B_k \sup\{1, A_k \sup\{1, \rho_k(x)\}\} \\ &\leq B_k \sup\{1, A_k\} \sup\{1, \rho_k(x)\} \end{aligned}$$

donc $g \circ f$ est linéairement majorée. Les propositions (ii) et (iv) se démontrent pareillement.

(ii) on a

$$\begin{aligned} \rho_k(v(x) \circ u(x) \cdot \xi) &\leq B_k \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{1+\alpha}(x)\} \rho_\beta(u(x) \cdot \xi) \\ &\leq B_k \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{1+\alpha}(x)\} A_\beta \sum_{\beta'+\beta'' \leq \beta} \sup\{1, \rho_{1+\beta'}(x)\} \rho_{\beta''}(\xi) . \end{aligned}$$

Par l'inégalité de convexité, $\rho_1(x)$ étant borné, on majore $\rho_{1+\alpha}(x) \cdot \rho_{1+\beta}(x)$ par $K\rho_{1+\alpha+\beta}(x)$, d'où, en réindexant

$$\rho_k(v(x) \circ u(x) \circ \xi) \leq C_k \sum_{\alpha+\beta \leq k} \sup\{1, \rho_{1+\alpha}(x)\} \rho_\beta(\xi) ,$$

donc $v \circ u$ est linéairement majorée. Les démonstrations de (v) et (vii) sont analogues $\square$

Définition 5.2.5.— Soient E^* et F^* deux chaînes d'espaces de Banach admettant des données d'approximations, U un ouvert de E^∞ borné dans E^1 . Nous dirons qu'une application f définie sur U et à valeurs dans F^∞ , de classe D^2 , est linéairement majorée si les applications f , δf et $\delta^2 f$ sont linéairement majorées. Il résulte de la proposition 5.2.4 et de la formule de dérivation des fonctions composées que le composé de deux applications de classe D^2 linéairement majorées est encore une application de classe D^2 linéairement majorée.

Une variété linéairement majorée est une variété munie d'un atlas de classe D^2 dont les changements de cartes sont linéairement majorés ; la notion d'application linéairement majorée s'étend alors aux applications entre de telles variétés. On vérifie par exemple que les variétés et les applications étudiées aux chapitres II et III sont linéairement majorées pour les atlas canoniques.

B I B L I O G R A P H I E.

- [1] R. ABRAHAM - *Lectures of Smale on differential topology*,
miméogr., Columbia University
- [2] R. ABRAHAM et J. ROBBIN - *Transversal mappings and flows*,
Benjamin, New York, 1967.
- [3] A. BASTIANI - *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie*,
J. Analyse Math., 13, 1964.
- [4] J. CERF - *Théorèmes de fibration*,
Sém. Cartan E.N.S., 1962-63.
- [5] J. DIEUDONNE - *Eléments d'analyse*,
t.1, Gauthier-Villars, Paris, 1969.
- [6] C. EHRESMANN - *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*,
Colloque de topologie, Bruxelles, 1950.
- [7] H.R. FISCHER - *Limesräume*,
Math. Ann., 137, 1959.
- [8] S. LANG - *Introduction to differentiable manifolds*,
Interscience, New York, 1962.
- [9] J. LESLIE - *On a differential structure for the group of diffeomorphisms*,
Topology, 6, 1967.
- [10] J.R. MUNKRES - *Elementary differential topology*,
Princeton Univ. Press, Princeton, 1961.
- [11] N. STEENROD - *The topology of fibre bundles*,
Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.
- [12] F. SERGERAERT - *Une généralisation du théorème de fonctions implicites de Nash*,
C.R.A.S., t. 270, 1970.
- [13] S. STERNBERG - *Celestial mechanics*,
Benjamin, New York, 1969.

*

* *

TABLE DES MATIERES.

CHAPITRE I

- § 1 - Familles fermées de parties d'un espace vectoriel topologique.
- § 2 - Espaces vectoriels S -bornés.
- § 3 - Applications linéaires S -bornées.
- § 4 - Chaînes d'espaces de Banach.
- § 5 - Applications dérivables.
- § 6 - Remarques d'ordre pratique.
- § 7 - Variétés dérivables.

CHAPITRE II

- § 0 - Applications partiellement différentiables.
- § 1 - La géométrie dérivable des espaces de sections différentiables d'un espace fibré vectoriel.
- § 2 - Variétés des sections différentiables d'un espace fibré quelconque.
- § 3 - Variétés d'applications différentiables.
- § 4 - Groupe des difféomorphismes d'une variété compacte.

CHAPITRE III

- § 0 - Voisinages tubulaires
- § 1 - Sous-variétés compactes d'une variété différentiable.
- § 2 - Fibration principale des espaces de plongements.
- § 3 - Caractérisation des applications dérivables de but $H^r(Y)$.

CHAPITRE IV

- § 1 - Un théorème d'approximation.
- § 2 - Quotient d'un groupe par un sous-groupe.
- § 3 - Quelques théorèmes de "smoothing".

CHAPITRE V

- § 1 - Théorème de fonctions implicites abstrait
- § 2 - Opérateurs d'approximation.
- § 3 - Le théorème de Nash.
- § 4 - Régularité des solutions.
- § 5 - Théorème de Nash et applications dérivables.

